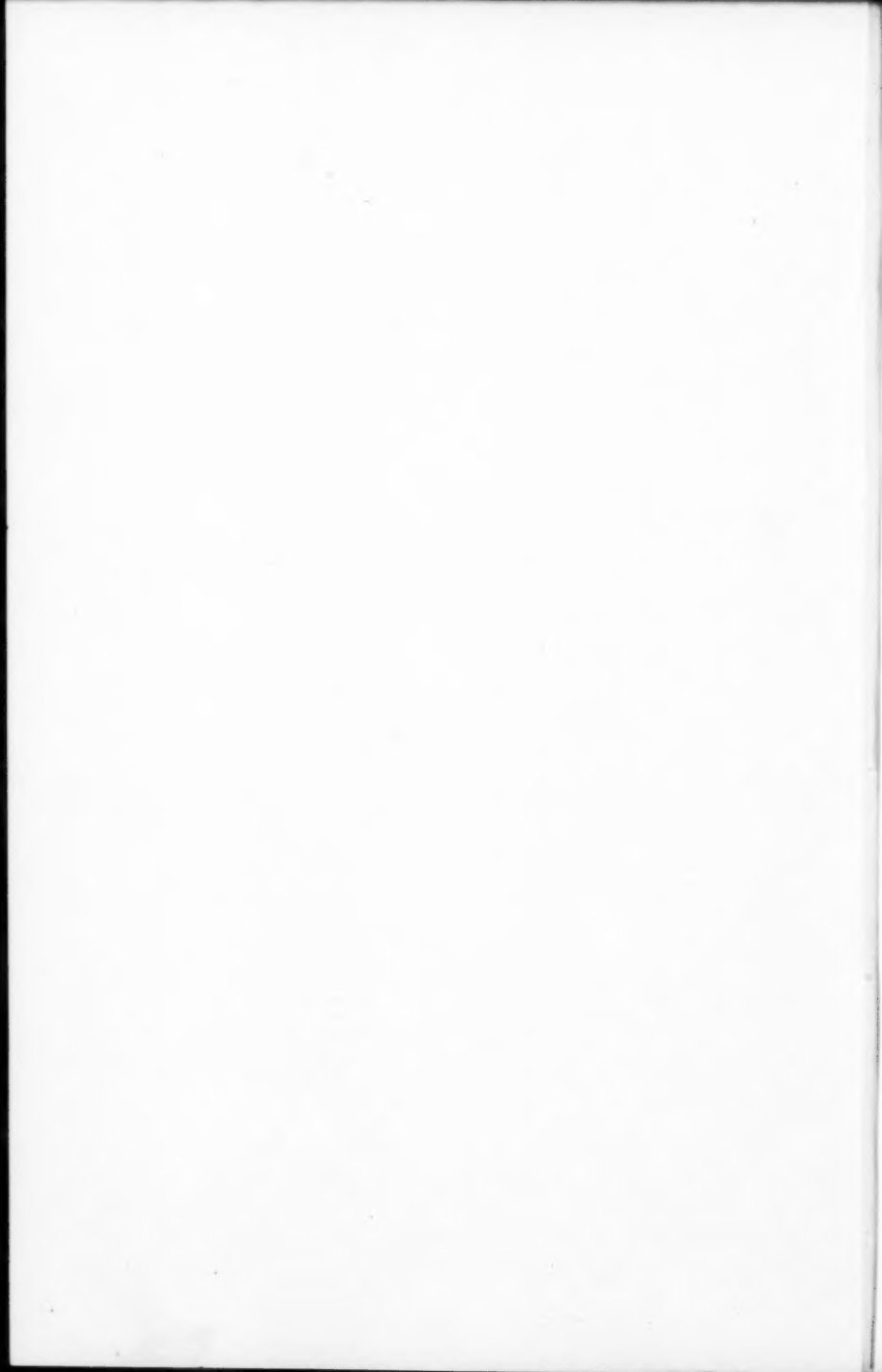


ANNALEN DER PHYSIK

FÜNFTE FOLGE

BAND 2



ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

5. Folge, Band 2
Der ganzen Reihe 394. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien E. Warburg

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



I 9 2 9

LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Physics Lib
(Ref)
Harc

Inhalt

Fünfte Folge. Band 2

Erstes Heft

| | Seite |
|---|-------|
| G. Jaffé und J. Dailidé-Gießen, Zur Optik geschichteter Halbleiter | 1 |
| Hermann Dänzer-Frankfurt a. M., Über die Absorption Hertz-scher Wellen in ionisierten Gasen. (Mit 22 Figuren) . . . | 27 |
| Wilhelm Anderson-Tartu-Dorpat (Estland), Eine Bemerkung zu Eddingtons neuer Theorie des elektrischen Elementarquantums | 63 |
| E. Justi-Marburg, Über die kalorimetrische Absolutmessung des elektrolytischen Leitvermögens für hochfrequenten Wechselstrom. (Mit 8 Figuren) | 65 |
| O. Gaertner-Bonn, Absolute Intensitätsmessungen an Röntgenstrahlen. (Mit 4 Figuren) | 94 |
| C. Lakeman und J. Th. Groosmuller-Amsterdam, Das Abbild eines Drahtes bei paralleler Beleuchtung. (Mit 1 Figur). . . | 123 |

Redaktionsschluss am 7. Juni 1929

Zweites Heft

| | |
|--|-----|
| W. Schindelin-München, Beiträge zur Raumakustik. (Mit 50 Figuren) | 129 |
| Ernst Scharstein-München, Beiträge zur Raumakustik. (Mit 41 Figuren) | 163 |
| E. Scharstein und W. Schindelin-München, Beiträge zur Raumakustik. (Die Akustik der Aula in der Albert-Ludwigs-Universität in Freiburg i. Br.). (Mit 9 Figuren) | 194 |
| Hans Kerschbaum-Berlin-Siemensstadt, Über Versuche an Wasserstoffatomstrahlen. Teil I. Über die technische Herstellung von Wasserstoffatomstrahlen und die Wirkung von Wasserstoffatomen auf die Schumannplatte. (Mit 4 Figuren) | 201 |

| | Seite |
|---|-------|
| E. Hiedemann-Köln, Über das Verhalten verschiedener organischer Dämpfe in der Hochfrequenz-Glimmentladung . . . | 221 |
| August Glaser-München, Über die beim Diamagnetismus der Gase gefundene Anomalie. IV. Mitteilung. Sauerstoffbeimischungen. (Mit 8 Figuren) | 233 |

Redaktionsschluß am 28. Juni 1929

Drittes Heft

| | |
|---|-----|
| A. Becker-Heidelberg, Über den Durchgang langsamer Kathodenstrahlen durch Metalle. II. (Mit 5 Figuren) | 249 |
| G. Tammann und W. Jellinghaus-Göttingen, Die Volumensfläche im Erweichungsintervall von Gläsern. (Mit 9 Figuren) | 264 |
| Otto Mittelstaedt-Leipzig, Die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit unter Verwendung des elektrooptischen Kerr-effektes. (Mit 9 Figuren) | 285 |
| Martin Zentgraf-Münster i. W., Über Ionenstrahlen. (Mit 11 Figuren) | 313 |
| Max Neunhoffer-Tübingen, Ultrarote Emissionsbanden bei hoher Dispersion. (Mit 3 Figuren) | 334 |
| Curt Schmieden-Danzig-Langfuhr, Über Hohlraumbildung in der idealen Flüssigkeit. (Mit 3 Figuren) | 350 |
| Ebbe Rasmussen-Kopenhagen, Über Gleichstromverstärkung. (Mit 7 Figuren) | 357 |

Redaktionsschluß am 15. Juli 1929

Viertes Heft

| | |
|---|-----|
| Werner Espe-Greifswald, Über die Emission von Elektronen aus Metallen bei Bestrahlung mit Röntgenstrahlen. (Mit 11 Figuren) | 381 |
| Richard Kolisko-Wien, Berichtigung zu dem Aufsatz: Die Erdschachsvibration eine Folge der Sonnentätigkeit | 427 |
| Wolfgang Riezler-München, Über den Dopplereffekt an homogenen Wasserstoffkanalstrahlen. (Mit 3 Figuren) | 429 |
| W. Kessenich-Rostow a. Don., Über den Einfluß des induktiv gekoppelten Indikators auf stehende elektrische Drahtwellen. (Mit 8 Figuren) | 445 |
| Fritz Sauter-Innsbruck, Beitrag zur Theorie des Streuproblems | 465 |
| W. Alexandrow-Zürich, Die magnetische Ablenkung der Korpuskularstrahlen in der Diracschen Wellenmechanik | 477 |

Redaktionsschluß am 26. Juli 1929

Fünftes Heft

| | |
|--|-----|
| W. Alexandrow-Zürich, Materiewelle und Materiestrahlen. (Über das Verhältnis zwischen Feld und Materie) | 485 |
| W. J. Kalinin-Saratow, Über die Erzeugung sehr kurzer elektrischer Wellen nach der Schaltung von Barkhausen-Kurz. (Mit 9 Figuren) | 498 |
| N. Novosilzew-Rostow a. Don, Untersuchungen des elektrischen Spektrums des Wassers mit ungedämpften Schwingungen in dem Wellenlängenbereich von 3000—2200 mm. (Mit 10 Figuren) | 515 |
| Eberhard Spenke-Königsberg, Das mikroskopische Hellfeld. (Mit 3 Figuren) | 537 |
| Alfred Kneschke-Dresden, Zur Theorie der Ausgleichsschwingungen. (Mit 6 Figuren) | 555 |
| J. Gratsiatos-Saloniki-München, Bemerkung zu meiner Arbeit „Über das Verhalten der radiotelegraphischen Wellen usw.“ | 576 |
| H. Rieckhoff-Kiel, Über Hochfrequenzleitfähigkeit und Dielektrizitätskonstanten wäßriger Elektrolytlösungen. (Mit 16 Figuren) | 577 |

Redaktionsschluß am 15. August 1929

Sechstes Heft

| | |
|--|-----|
| Heinrich Hencky-Delft, Das Superpositionsgesetz eines endlich deformierten relaxationsfähigen elastischen Kontinuums und seine Bedeutung für eine exakte Ableitung der Gleichungen für die sahe Flüssigkeit in der Eulerschen Form | 617 |
| S. Matthes-Dresden, Die Abhängigkeit der δ -Strahlung vom Entgasungszustande einer Platinfolie. (Mit 6 Figuren) | 631 |
| W. Alexandrow-Zürich, Bemerkung über den Impuls der Lichtquanten | 646 |
| Georg Franke-Gießen, Erzwungene Schwingungen einer eingespannten kreisförmigen Platte. (Mit 30 Figuren) | 649 |
| Friedrich Möglich-Berlin-Lichterfelde, Quantentheorie schwingender Kontinua. (Mit 1 Figur) | 676 |
| Hans Hellmann-Stuttgart, Über das Auftreten von Ionen beim Zerfall von Ozon und die Ionisation der Stratosphäre. (Mit 9 Figuren) | 707 |
| Max Trautz und P. B. Baumann-Heidelberg, Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasmischungen. II. Die Reibung von H_2-N_2 - und H_2 -CO-Gemischen | 733 |
| Max Trautz und Friedr. Wilh. Stauf-Heidelberg, Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasmischungen. III. Die Reibung von $H_2-C_2H_4$ -Gemischen | 737 |

| | Seite |
|--|-------|
| Max Trautz und Karl Friedr. Kipphan-Heidelberg, Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasmischungen. IV. Die Reibung binärer und ternärer Edelgasgemische | 743 |

Redaktionsschluß am 26. August 1929

Siebentes Heft

| | |
|--|-----|
| Ulrich Dehlinger-Stuttgart, Zur Theorie der Rekristallisation reiner Metalle. (Mit 8 Figuren) | 749 |
| Rudolf Weyrich-Brünn, Über das Strahlungsfeld einer endlichen Antenne zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen . . . | 794 |
| Heinz Schlechtweg-Neu-Isenburg bei Frankfurt a. M., Zur Theorie des Glasziehens und Blasens | 805 |
| Hermann Senftleben und Erich Germer-Breslau, Nachweis einer direkten durch Bestrahlung bewirkten Dissoziation der Halogenmoleküle. (Mit 1 Figur) | 847 |
| W. Pupp-Berlin-Reinickendorf, Über Funkenerregung kurzer elektrischer Wellen unter 1 m Wellenlänge und einen neuartigen Stoßfunkensender. (Mit 28 Figuren) | 865 |

Redaktionsschluß am 4. September 1929

Achstes Heft

| | |
|--|------|
| Ernst Brüche-Berlin-Reinickendorf, Wirkungsquerschnitt und Molekelbau der isosteren Reihen: $N_2-(CH)_2$ u. $O_2-[(NH)_2]-(CH_2)_2$. (Mit 11 Figuren) | 909 |
| K. Schlesinger-Berlin-Friedrichshagen, Eine neue Methode zur Bestimmung der Temperatur von Glühfäden. (Mit 18 Figuren) | 933 |
| H. J. Seemann und E. Vogt-Marburg a. L., Überstruktur und magnetische Suszeptibilität im System Kupfer-Gold. (Mit 1 Figur) | 976 |
| Felix Pollaczek-Berlin-Tempelhof, Über die Fortpflanzung mechanischer Vorgänge in einem linearen Gitter. (Mit 5 Figuren) | 991 |
| W. Heuse und J. Otto-Charlottenburg, Über eine Neubestimmung des Grenzwertes der Ausdehnungs- und Spannungskoeffizienten von Helium, Wasserstoff und Stickstoff. (Mit 1 Figur) . . . | 1012 |
| W. Gordon-Hamburg, Zur Berechnung der Matrizen beim Wasserstoffatom | 1031 |

Redaktionsschluß am 14. September 1929

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1929, BAND 2, HEFT 1

Zur Optik geschichteter Halbleiter

Von G. Jaffé und J. Dailidé

Die folgende Untersuchung ist von der Fragestellung ausgegangen, ob es möglich ist, Bedingungen anzugeben, unter denen nach der Maxwellschen Theorie ein Körper „schwarz“ ist, d. h. also an seiner Oberfläche kein Licht reflektiert und alles eindringende Licht absorbiert. Da es kein homogenes Medium von diesen Eigenschaften gibt, mußte der Beantwortung der Frage die Untersuchung der Lichtausbreitung in inhomogenen Halbleitern — also im einfachsten Falle eines parallel geschichteten Halbleiters — vorausgehen.

Die Optik inhomogener und insbesondere geschichteter Dielektrika ist wiederholt behandelt¹⁾, aber erst durch eine Untersuchung von Behrens²⁾ ist das Problem für den parallel geschichteten Nichtleiter in mathematisch strenger Weise ohne Vernachlässigungen durchgeführt worden. An diese Arbeit, die — wie es scheint — in Physikerkreisen noch wenig bekannt ist, knüpfen wir an, indem wir die dort gewählte Behandlungsweise auf den geschichteten Halbleiter übertragen.³⁾ Das gelingt in der üblichen Weise, indem man einen komplexen Brechungskoeffizienten einführt und die Rechnung in konsequenter Weise komplex durchführt, wobei sich charakteristische Unterschiede gegen den Fall des Nichtleiters ergeben. Nachdem die Formeln für die Lichtausbreitung im geschichteten Halbleiter gewonnen sind, wird die an der Grenze eines solchen Mediums reflektierte Energie berechnet.

1) Zur Literatur vgl. man R. Gans, Handbuch der Experimentalphysik 19. S. 343. 1928. Die älteren Untersuchungen, die noch nicht auf dem Boden der elektromagnetischen Lichttheorie stehen, findet man in Winkelmanns Handbuch der Physik II. Aufl. 6 [2]. S. 485 ff.

2) W. Behrens, Math. Ann. 1915. S. 380.

3) Daß dieses möglich ist, wird schon von Behrens angegeben.

Nunmehr lassen sich hinreichende Bedingungen für das Schwarzsein angeben; sie enthalten charakteristischerweise eine Forderung, in die das Bildungsgesetz des Schichtkörpers von der Grenzfläche bis ins Unendliche eingeht. Die Frage, ob es speziell gebaute Schichtkörper gibt, die den aufgestellten Bedingungen des Schwarzseins in mathematischer Strenge genügen, muß offen bleiben. An zwei Beispielen, von denen sich das eine ohne alle Vernachlässigungen durchrechnen läßt, kann man aber zeigen, daß es jedenfalls Bildungsgesetze für den Schichtkörper gibt, bei denen er mit jeder gewünschten Annäherung schwarz ist.¹⁾

§ 1. Inhomogene Wellen im homogenen Halbleiter

Wir knüpfen an die Formeln für die sogenannten inhomogenen Wellen in einem homogenen Halbleiter an.²⁾ Wir wählen die Ebenen $x = \text{const}$ zu den Ebenen konstanter Amplitude und legen die Ebenen konstanter Phase so, daß ihre gemeinsame Normale in die x, y -Ebene („Einfallebene“) fällt; man erhält dann zwei verschiedene Typen inhomogener Wellen, je nachdem der elektrische oder der magnetische Vektor in die z -Richtung fällt. Im ersten Falle sind nur $\mathfrak{E}_z, \mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y$ von Null verschieden, im zweiten Falle $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{H}_z$. Wir betrachten zuerst die Wellen erster Art. Die Maxwell'schen Gleichungen

$$(I) \quad \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi \sigma \mathfrak{E} \right]$$

$$(II) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mu \mathfrak{H}}{\partial t}$$

lassen die Lösung

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = A e^{-i\nu \left(t - \frac{ix+my}{c} \right)}, & \mathfrak{H}_x = \frac{m}{\mu} A e^{-i\nu \left(t - \frac{ix+my}{c} \right)}, \\ \mathfrak{H}_y = - \frac{l}{\mu} A e^{-i\nu \left(t - \frac{ix+my}{c} \right)} \end{cases}$$

1) Der gleiche Gegenstand wird auch in der Dissertation von J. Dailidé, Gießen 1929, behandelt. Die dort ausführlich gegebenen Rechnungen sind hier gekürzt; dagegen sind hier einige Punkte behandelt, die in der Dissertation unerledigt bleiben, so insbesondere die Berücksichtigung von Wellen zweiter Art.

2) Eine ausführliche, allerdings von der hier gegebenen abweichende Darstellung der inhomogenen Wellen findet sich bei W. König, Handb. d. Physik, 20. S. 194. Ziff. 47–49.

zu, wenn

$$(2) \quad l = \tilde{n} \cdot \cos \tilde{\vartheta}, \quad m = \tilde{n} \cdot \sin \tilde{\vartheta}$$

gesetzt wird und die Beziehung

$$(3) \quad l^2 + m^2 = \tilde{n}^2 = \varepsilon \mu + i \frac{4\pi \sigma \mu}{\nu}$$

erfüllt ist.

Die konstanten Größen A , ν und $\tilde{\vartheta}$ bedeuten bzw. Amplitude, Kreisfrequenz und den „komplexen Brechungswinkel“, während sich für den komplexen Brechungsindex \tilde{n}

$$(4) \quad \tilde{n} = n + i k$$

in bekannter Weise

$$(5a) \quad n^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\varepsilon \mu)^2 + \left(\frac{4\pi \sigma \mu}{\nu} \right)^2} + \varepsilon \mu \right]$$

$$(5b) \quad k^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\varepsilon \mu)^2 + \left(\frac{4\pi \sigma \mu}{\nu} \right)^2} - \varepsilon \mu \right]$$

ergibt.

Die physikalische Bedeutung der eingeführten komplexen Größen ergibt sich, wenn man

$$(6) \quad e^{-i\nu \left(t - \frac{l x + m y}{c} \right)} = e^{-\frac{\nu K x}{c}} e^{-i\nu \left(t - \frac{p(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)}{c} \right)}$$

setzt, wo nun ϑ der reelle Winkel zwischen Wellennormale und x -Achse ist. Der Zusammenhang von K , p , ϑ mit $\tilde{n} = n + i k$ und $\tilde{\vartheta}$ ergibt sich aus (6) und (2)

$$(7a) \quad m = \tilde{n} \cdot \sin \tilde{\vartheta} = p \cdot \sin \vartheta,$$

$$(7b) \quad l = \tilde{n} \cdot \cos \tilde{\vartheta} = p \cdot \cos \vartheta + i K.$$

Die reellen Größen p und K , die als Brechungsindex bzw. Absorptionskoeffizient „für die Richtung ϑ “ zu bezeichnen sind, berechnen sich aus den Gleichungen (7):

$$(8a) \quad p^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\varepsilon \mu)^2 + \left(\frac{4\pi \sigma \mu}{\nu \cos \vartheta} \right)^2} + \varepsilon \mu \right]$$

$$(8b) \quad K^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\varepsilon \mu)^2 + \left(\frac{4\pi \sigma \mu}{\nu \cos \vartheta} \right)^2} - \varepsilon \mu \right]$$

und hängen also noch von ϑ ab. Nur in dem Sonderfall, daß die Ebenen konstanter Amplitude mit den Ebenen konstanter Phase zusammenfallen ($\tilde{\vartheta} = \vartheta = 0$), gehen p und K in die Körperkonstanten n und k über.

Der Begriff des „Strahls“ wird bei der inhomogenen Welle bis zu einem gewissen Grade hinfällig, weil der Poyntingsche Vektor während jeder Schwingung seine Richtung periodisch ändert; bezeichnet man aber als Strahlrichtung die Richtung der mittleren Energieströmung, so läßt sich mit Hilfe der angegebenen Formeln leicht zeigen, daß bei der inhomogenen Welle erster Art diese Richtung mit der Normalenrichtung zusammenfällt.¹⁾

Der Fall der inhomogenen Welle zweiter Art erledigt sich sehr einfach durch folgende Bemerkung. Bei der Beschränkung auf zeitlich periodische Vorgänge von der Frequenz ν , kann man die erste Feldgleichung in der Form

$$(Ia) \quad \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathfrak{E}}}{\partial t}$$

schreiben, wenn die komplexe Dielektrizitätskonstante $\tilde{\epsilon}$ durch

$$(9) \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\mu}$$

definiert wird. Die Formeln Ia und II gehen nun ineinander über, wenn man

(10) \mathfrak{E} durch \mathfrak{H} , \mathfrak{H} durch $-\mathfrak{E}$, $\tilde{\epsilon}$ durch μ , μ durch $\tilde{\epsilon}$ ersetzt.

Obgleich man durch diese Vertauschungen von den Formeln (1) unmittelbar zu der Lösung für die inhomogenen Wellen zweiter Art gelangen kann²⁾, bestehen doch wesentliche physikalische Verschiedenheiten, die darin ihren Grund haben, daß das reelle μ mit dem komplexen $\tilde{\epsilon}$ zu vertauschen ist. Es treten nämlich neue Phasenverschiebungen auf, und die Richtung des mittleren Energiestroms fällt nicht mehr mit der Normalenrichtung zusammen.³⁾

§ 2. Lichtausbreitung im geschichteten Halbleiter

a) Sonderfall der ausgezeichneten Fermatschen Kurven

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung des parallel geschichteten Halbleiters zu. Wir definieren ihn, indem wir

1) Man vgl. W. König, a. a. O. Ziff. 48.

2) Wegen $\tilde{\mu}^2 = \tilde{\epsilon} \mu$ blieben dabei die Beziehungen (4) bis (8) erhalten.

3) Man vgl. W. König, a. a. O. Ziff. 48.

festsetzen, daß ε , μ , σ von x , und nur von x , abhängen sollen. Über die Art der Abhängigkeit machen wir folgende Voraussetzungen:

1. ε , μ , σ sollen für alle x stetige, stückweise zweimal (an den Knickstellen nach vorn und nach hinten) stetig differenzierbare Funktionen von x sein;

2. für alle reellen x soll $\varepsilon \geq 1$, $\mu \geq 1$, $\sigma \geq 0$ gelten;

3. für $x = \pm \infty$ sollen ε , μ , σ Grenzwerte besitzen, die aber auch unendlich sein können. Insbesondere soll der Grenzwert von σ/ε von 0 verschieden sein, so daß unter allen Umständen auch K einen von 0 verschiedenen Limes hat. Weitere Einschränkungen über das Verhalten von ε , μ , σ im Unendlichen werden wir an späterer Stelle zu machen haben.

Es liegt nun nahe, Lösungen der Feldgleichungen in der Weise aufzubauen, daß man von dem Ansatz (1) ausgeht und darin außer ε , μ , σ auch A und $\tilde{\mathcal{F}}$ (bzw. \mathcal{P}), d. h. also auch l und m , als Funktionen von x ansieht. Tut man das, und zieht man denjenigen Teil der Exponentialfunktion, der nur von x abhängt, mit A zusammen, so gelangt man zu dem Ansatz

$$(11) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_z = F e^{-i\nu \left(t - \frac{my}{c}\right)}, & \mathcal{H}_x = \frac{m}{\mu} F e^{-i\nu \left(t - \frac{my}{c}\right)}, \\ \mathcal{H}_y = -\frac{l}{\mu} F e^{-i\nu \left(t - \frac{mx}{c}\right)}. \end{cases}$$

Dabei sollen natürlich l und m für jeden Wert $x = x_0$ in der durch die Gleichung (2) und (3) gegebenen Weise von $\varepsilon(x_0)$, $\mu(x_0)$, $\sigma(x_0)$ abhängen.

Jedes durch die Gleichung (11) dargestellte elektromagnetische Feld nennen wir eine inhomogene Welle erster Art, und zwar genauer eine solche, die in der x, y -Ebene einfällt und in der x, y -Ebene polarisiert ist.¹⁾ Wir werden im folgenden nur die Welle erster Art behandeln; die Formeln für die entsprechende inhomogene Welle zweiter Art, die also in der x, y -Ebene einfällt und senkrecht zu ihr polarisiert ist, ergeben sich daraus nach der Regel (10).

1) Über den Sinn dieser Definition vgl. man die Ausführungen bei Behrens, a. a. O. § 4.

Ein Ansatz von der Form (11) braucht natürlich im allgemeinen keineswegs den Maxwell'schen Gleichungen zu genügen. Wir haben daher zunächst zu untersuchen, ob und gegebenenfalls wann das der Fall ist. Tragen wir zu diesem Zwecke den Ansatz (11) in die Feldgleichungen ein, so ergeben sich unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Gleichungen identisch in x und y bestehen sollen, die beiden Forderungen

$$(12) \quad \frac{dm}{dx} = 0$$

und

$$(13) \quad \frac{d\mu}{dx} = 0.$$

Die Beziehung (12) legt die Bahnkurve [für die Wellennormale oder für den Strahl (vgl. S. 4)] fest. Behrens bezeichnet für den Fall des geschichteten Nichtleiters Kurven, die der Bedingung (12) genügen, als *Fermatsche Kurven*, weil sie sich aus dem Fermatschen Prinzip ableiten lassen. Obgleich das letztere, wie wir gleich sehen werden, hier nicht mehr zutrifft, wollen wir dennoch an der Bezeichnung festhalten. Ist außerdem die Bedingung (13) erfüllt, so nennen wir mit Behrens die Kurve eine *ausgezeichnete Fermatsche Kurve erster Art*.

Die Gleichung (13) stellt eine Forderung an den Aufbau des Schichtkörpers dar; man erkennt das am einfachsten, indem man die Gleichungen (12) und (13) integriert und dann nach (2) \bar{r} eliminiert. Es ergibt sich so die Gleichung

$$(14a) \quad \bar{n}^2 = c_1^2 + c_2^2 \mu^2,$$

in der c_1 und c_2 Konstante sind¹⁾, und die zwischen den drei Körperfunktionen zwei Beziehungen festlegt. Entsprechend erhält man für die ausgezeichneten Fermatschen Kurven zweiter Art

$$(14b) \quad \bar{n}^2 = c_3^2 + c_4^2 \bar{z}^2;$$

es ist aber zu berücksichtigen, daß in diesem Falle die Gleichung (12) die Bahnkurve der Wellennormale, nicht aber diejenige des Strahls festlegt (vgl. S. 4).

1) Nach der Gleichung (7) muß c_1 reell und c_2 komplex sein.

Da die Konstanten c_1 bis c_4 jede zwei Wurzelwerte annehmen können, gibt es — wie von Behrens näher ausgeführt — entweder vier ausgezeichnete Fermatsche Kurven erster (bzw. zweiter) Art oder keine¹⁾, je nachdem die Bedingung (14a) [bzw. (14b)] erfüllt ist, oder nicht. Im übrigen hat unsere Untersuchung ergeben: damit das Feld (11) [bzw. das durch die Vertauschung (10) daraus entstehende] eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen darstellt, und das bedeutet: damit eine einzelne inhomogene Welle erster (bzw. zweiter) Art sich in dem Medium fortpflanzen kann, ist notwendig, daß sie sich längs einer ausgezeichneten Fermatschen Kurve fortpflanzt. Nur in diesem Sonderfalle geht die Welle, wie wir sehen werden, durch das Medium, ohne zu Reflexion Anlaß zu geben.

Wir wenden uns nun der Bedingung (12) zu, die sich integriert folgendermaßen schreibt

$$(15) \quad \tilde{n} \cdot \sin \tilde{\vartheta} = p \cdot \sin \vartheta = \text{const.}$$

Das Snelliussche Brechungsgesetz gilt also formal, wenn man den komplexen Brechungsindex und den komplexen Brechungswinkel einführt, und das bedeutet, daß es in derjenigen verallgemeinerten Form gilt, in der es auch für den unstetigen Übergang aus einem Dielektrikum in einen homogenen Halbleiter gültig ist.

Daraus folgt aber, daß das Fermatsche Prinzip nicht mehr anwendbar bleibt. Dieses verlangt, wenn man die Phasengeschwindigkeit $q = \frac{c}{p}$ zugrunde legt, daß

$$(16) \quad \delta \int_1^2 \frac{ds}{q} = \delta \int_1^2 \frac{p}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 0$$

ist. Daraus ergibt sich die Forderung

$$(17) \quad p \cdot \sin \vartheta \left[1 + \frac{K^2}{p^2 + K^2} \right] = \text{const.},$$

die nur im Nichtleiter ($\sigma = K = 0$) mit (15) übereinstimmt. Übrigens gilt das Fermatsche Prinzip auch nicht, wenn man von der Strahlgeschwindigkeit ausgeht, da ja diese bei Wellen erster Art mit der Phasengeschwindigkeit zusammenfällt.

1) Mehr als vier ausgezeichnete Fermatsche Kurven gibt es nur im homogenen Medium.

Für die Fermatschen Kurven erhält man aus der Bedingungs-gleichung (15) unter Berücksichtigung von (8a) die Darstellung

$$(18) \quad y = \sqrt{2} \int_0^x \frac{m_0}{\bar{\sigma}} \sqrt{(\varepsilon \mu - m_0^2)^2 + \bar{\sigma}^2 - (\varepsilon \mu - m_0^2)} dx,$$

wenn

$$(18a) \quad \bar{\sigma} = \frac{4\pi\sigma\mu}{\nu}$$

gesetzt und unter m_0 der konstante Wert von m verstanden wird. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von ε , μ , σ ändert sich die Richtung der Fermatschen Kurven stetig.

Das Feld der Welle, die sich längs einer ausgezeichneten Fermatschen Kurve fortpflanzt, läßt sich ebenfalls mit Hilfe einer Quadratur angeben, wie wir an späterer Stelle zeigen werden (vgl. S. 11).

§ 3. Lichtausbreitung im geschichteten Halbleiter

b) Der allgemeine Fall

Wir haben gesehen, daß die einzelne Welle (11) im allgemeinen *nicht* den Maxwell'schen Gleichungen genügt; man gelangt aber zu einer Lösung, wenn man das Feld durch eine passend konstruierte zweite Welle der gleichen Art ergänzt. Wir wollen die beiden Wellen durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden und gleich die Festsetzungen

$$(19) \quad m_1 = m_2 = m = \text{constans}$$

und

$$(20) \quad l_1 = -l_2 = l$$

treffen. Es wird sich zeigen, daß diese Bedingungen für die Konstruktion der Lösung hinreichend sind; es läßt sich aber auch beweisen, daß sie notwendig sind, wenn man eine Lösung in der angegebenen Weise für beliebige Schichtkörper aus zwei Einzelwellen superponieren will.¹⁾

Die Bedingung (19) legt wieder die Bahnkurven als Fermatsche Kurven fest; aus (19) und (20) ergibt sich $\bar{\partial}_2 = \pi - \bar{\partial}_1$, oder in reeller Darstellung (man vgl. 7b)

$$(20a) \quad K_2 = -K_1, \quad p_2 = p_1, \quad \partial_2 = \pi - \partial_1;$$

1) Der Beweis für Nichtleiter bei Behrens, a. a. O. S. 392ff., für Halbleiter bei Dailidé, Dissertat. § 5.

die Richtungen der Wellen 1 und 2 gehen also an jeder Stelle x_0 durch Reflexion an der Ebene $x = x_0$ auseinander hervor.

Danach lautet nun unser Ansatz für die Lösung erster Art (Polarisation in der Einfallsebene):

$$(21) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_z = (F_1 + F_2) e^{-i\nu \left(t - \frac{my}{c}\right)}, & \mathfrak{H}_z = \frac{m}{\mu} (F_1 + F_2) e^{-i\nu \left(t - \frac{my}{c}\right)}, \\ \mathfrak{H}_y = -\frac{l}{\mu} (F_1 - F_2) e^{-i\nu \left(t - \frac{my}{c}\right)}. \end{cases}$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Feldgleichungen hinein, so ist nur noch der zweiten Gleichung I und der dritten Gleichung II zu genügen. Erstere liefert

$$(22) \quad \frac{d}{dx} (F_1 + F_2) = \frac{i\nu l}{c} (F_1 - F_2),$$

letztere — nach Umformung mit Hilfe von (3) —

$$(23) \quad -\frac{i\nu}{c} l^2 (F_1 + F_2) + \frac{d}{dx} [l(F_1 - F_2)] - \frac{d \lg \mu}{dx} [l(F_1 - F_2)] = 0.$$

Eliminiert man $l(F_1 - F_2)$ zwischen (22) und (23) und setzt

$$(24) \quad F_1 + F_2 = F,$$

so ergibt sich für F die Differentialgleichung

$$(25) \quad \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{d \lg \mu}{dx} \frac{dF}{dx} + \frac{\nu^2 l^2}{c^2} F = 0.$$

Gelingt es, F aus dieser Gleichung zu bestimmen, so ergeben sich F_1 und F_2 einzeln aus (22) und (24)

$$(26a) \quad F_1 = \frac{1}{2} \left(F - \frac{ic}{\nu l} \frac{dF}{dx} \right),$$

$$(26b) \quad F_2 = \frac{1}{2} \left(F + \frac{ic}{\nu l} \frac{dF}{dx} \right),$$

und mit diesen Werten stellt (21) eine Lösung der Feldgleichungen dar. Man überzeugt sich hinterher leicht, daß auch den Forderungen

$$(27) \quad \operatorname{div} \mathcal{E} = \operatorname{div} \mathfrak{E} = \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0$$

genügt ist. Trotzdem hat \mathfrak{H} eine longitudinale Komponente.

Die entsprechende, aus zwei inhomogenen Wellen zweiter Art aufgebaute Lösung (Polarisation senkrecht zur Einfallsebene)

ebene) erhält man durch die Vertauschungsregeln (10). Es bleiben also auch die Gleichungen (26a, b) bestehen, wenn nur die Differentialgleichung (25) durch

$$(25a) \quad \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{d \lg \tilde{\varepsilon}}{dx} \frac{dF}{dx} + \frac{\nu^2 l^2}{e^2} F = 0$$

ersetzt wird. An die Stelle von (27) tritt dann

$$(27a) \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \operatorname{div} \tilde{\varepsilon} \mathfrak{E} = 0;$$

die Wellen zweiter Art sind also im geschichteten Halbleiter weder transversal in \mathfrak{E} , noch verschwindet $\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E}$, wie sich übrigens auch aus der Form Ia der ersten Feldgleichung ergibt, falls \mathfrak{E}_x von Null verschieden ist.

§ 4. Integration der Differentialgleichung für das Feld

Die Integration der Differentialgleichung (25) läßt sich in der von Behrens angegebenen Weise durchführen. Es werde zunächst

$$(28) \quad \xi = \frac{1}{c} \int_0^x l dx = \xi_1 + i \xi_2$$

als neue Variable eingeführt, wodurch die Differentialgleichung die Form

$$(29) \quad \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{d \lg l/\mu}{d\xi} \frac{dF}{d\xi} + \nu^2 F = 0$$

annimmt.

Um nun den typischen Fall ohne unnötige Komplikationen zu behandeln, wollen wir, wiederum im Anschluß an Behrens, eine gewisse Einschränkung bezüglich der betrachteten Parameterwerte treffen.¹⁾ Es sollen nämlich nur solche m -Werte betrachtet werden, daß die Tangente der Fermatschen Kurven (18) außerhalb eines gewissen Winkelraums liegt, der die positive und negative y -Richtung einschließt. Dadurch wird physikalisch die Erscheinung der totalen Reflexion ausgeschlossen und die Fermatschen Kurven erstrecken sich beiderseits bis ins Unendliche. Nach den für das Verhalten der Funktionen ε , μ , σ gemachten Annahmen wächst dann wegen der Gleichungen (7) und (8) ξ_1 gleichzeitig mit x , und

1) W. Behrens, a. a. O. S. 385.

auch ξ_2 wächst gleichzeitig mit x , außer wenn $\sigma = 0$ ist, in welchem Falle ξ_2 konstant bleibt. Ferner ist unter allen Umständen

$$(30) \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \xi_1 = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \xi_2 = \pm \infty,$$

was für den Überblick über die Verhältnisse im Unendlichen wesentlich ist.

Wir behandeln (29) zunächst für den Sonderfall ausgezeichneter Fermatscher Kurven; dann reduziert sich F auf F_1 und l/μ ist eine Konstante. Daher wird einfach

$$(31) \quad F_1 = C_1 e^{i\nu\xi} + C_2 e^{-i\nu\xi}, \quad F_2 = 0,$$

und damit ist das Feld in diesem Sonderfall mittels der einen Quadratur (28) berechenbar.

Im allgemeinen Falle beseitigen wir das zweite Glied von (29) in der üblichen Weise durch den Ansatz

$$(32) \quad F = f \cdot e^H,$$

wo

$$(32a) \quad H = \lg \left(\frac{l}{\mu} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird. Dadurch wird aus der Differentialgleichung (29)

$$(33) \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2} + (\nu^2 + a)f = 0$$

mit der Abkürzung

$$(34) \quad \frac{d^2 H}{d\xi^2} - \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 = a.$$

Die Gleichung (33) wird durch die Reihe

$$(35) \quad f_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{(i\nu)^n}$$

gelöst, wobei die f_n durch die Rekursionsformeln

$$(36) \quad \begin{cases} f_0 = e^{i\nu\xi} \\ f_n = \frac{e^{-i\nu\xi}}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{i\nu\xi} f_{n-1} a d\xi - \frac{e^{i\nu\xi}}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} e^{-i\nu\xi} f_{n-1} a d\xi \end{cases}$$

definiert sind. Die Reihe (35) konvergiert gleichmäßig, wenn ξ in dem Intervall $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$ liegt, das durch die Bedingung

$$(37) \quad \int_{\xi_0}^{\xi_1} |a d\xi| \leq \frac{\nu}{2}$$

eingeschränkt ist.

Daraus folgt insbesondere, daß sich die Partikularlösung f_p in der Nachbarschaft eines beliebigen im Endlichen gelegenen Punktes ξ_0 wie $e^{i\nu\xi}$ verhält, d. h. genauer, daß

$$(38) \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} (f_p - e^{i\nu\xi}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left(\frac{f_p'}{i\nu} - e^{i\nu\xi} \right) = 0$$

ist, wenn durch einen Apostroph die Ableitung nach ξ angedeutet wird.

Geht man in (36) von $f_0 = e^{-i\nu\xi}$ aus, so gelangt man zu der konjugiert komplexen Funktion \bar{f}_p , und diese stellt ein zweites, vom ersten linear unabhängiges, partikuläres Integral von (33) dar. Das vollständige Integral hat also die Form

$$(39) \quad f = C_1 f_p + C_2 \bar{f}_p,$$

wo C_1 und C_2 Konstante sind. Geht man zu F zurück, so ist

$$(40) \quad F = e^H (C_1 f_p + C_2 \bar{f}_p)$$

und demnach

$$(41) \quad \frac{dF}{dx} = e^H \left[C_1 \left(\frac{df_p}{dx} + f_p \frac{dH}{dx} \right) + C_2 \left(\frac{d\bar{f}_p}{dx} + \bar{f}_p \frac{dH}{dx} \right) \right].$$

In der Umgebung eines jeden im Endlichen gelegenen Punktes ist nach (38)

$$(39a) \quad f = C_1 e^{i\nu\xi} + C_2 e^{-i\nu\xi}.$$

Alle diese Resultate lassen sich auf demselben Wege, wie bei Behrens¹⁾, gewinnen, wenn dabei auf die komplexe Natur von ξ gebührend Rücksicht genommen wird; nur das Verhalten im Unendlichen erfordert eine besondere Betrachtung, weil für $x = \pm \infty$ nach (30) eine der beiden Fundamentallösungen nicht beschränkt bleibt. Es läßt sich aber zeigen²⁾, daß trotzdem unter einer bestimmten Voraussetzung die Lösung, z. B. für $x = +\infty$, asymptotisch durch

$$(42) \quad f = C_1^\infty e^{i\nu\xi} + C_2^\infty e^{-i\nu\xi}$$

1) W. Behrens, a. a. O. S. 401 ff.

2) Dissertation Dailidé § 6.

dargestellt wird, wo C_1^∞ und C_2^∞ Konstanten sind, die natürlich im allgemeinen nicht mit den Konstanten C_1 und C_2 der Formel (39) übereinstimmen. Analoges gilt für $x = -\infty$, nur daß dann nicht $e^{-i\nu\xi}$, sondern $e^{i\nu\xi}$ nach (30) über alle Grenzen wächst.

Die Voraussetzung nun, die zu machen ist, besteht darin, daß die durch (34) definierte Funktion a nach $\xi = \pm\infty$ absolut integrabel bleibt. Dafür wiederum ist hinreichend, wenn man die von Behrens angegebenen Bedingungen auf die komplexe Dielektrizitätskonstante überträgt, d. h. es genügt, daß die Funktionen $\alpha = \tilde{\epsilon}^{-1/2}$ und $\beta = \mu^{-1/2}$ für $x = \pm\infty$ endliche Grenzwerte besitzen, ferner müssen ihre zwei ersten Ableitungen dabei gegen Null konvergieren und absolut integrabel sein. Diese Voraussetzungen über das Verhalten von $\tilde{\epsilon}$ und μ im Unendlichen bedeuten physikalisch kaum eine Einschränkung; die Körperfunktionen ϵ , μ , σ können dabei noch unendliche Grenzwerte besitzen.

Nach (40) und (42) gilt für $x = +\infty$ die asymptotische Darstellung

$$(43) \quad F_\infty = e^{H(\infty)}(C_1^\infty e^{i\nu\xi} + C_2^\infty e^{-i\nu\xi}).$$

Fordert man also, daß aus dem positiv Unendlichen keine Energie ins Endliche befördert werden soll, so muß $C_2^\infty = 0$ sein. Dann verschwindet das Feld überhaupt für $x = +\infty$ exponentiell, d. h. es gelangt auch keine Energie ins positiv Unendliche.¹⁾

Die Bedingung

$$(44) \quad C_2^\infty = 0$$

hat nach bekannten Sätzen ein ganz bestimmtes Verhältnis von $C_2/C_1 = \alpha$ für jede im Endlichen gelegene Stelle ξ_0 zur Folge. Nach dem eben ausgeführten ergibt sich aus (39) und (35)

1) Für diese Folgerung ist die Annahme wesentlich, daß $\lim_{x=\infty} \sigma/\epsilon \neq 0$ ist (vgl. S. 5), weil sonst nicht notwendigerweise $\lim_{x=\infty} \xi_2 = \infty$ wäre. Infolgedessen ist es nicht statthaft, in den folgenden Betrachtungen $\sigma = 0$ zu setzen, was bei allem früheren zulässig war. Der Fall $\sigma = 0$ ist aber schon von Behrens erledigt.

$$(44a) \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1} = - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\infty)/(i\nu)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n(\infty)/(-i\nu)^n},$$

wobei das Argument ∞ andeutet, daß in (36) $\xi = \infty$ zu setzen ist.

Ist die Forderung (44) erfüllt, so ist man berechtigt, das von F_1 herrührende Feld als die *hindurchgehende Welle*, das durch F_2 gegebene Feld als *reflektierte Welle* zu bezeichnen, da ja aus dem positiv Unendlichen keine Energie einfällt. In der Tat zeigen die Gleichungen (20a), daß an jeder Stelle zwischen unseren beiden Teilfeldern das Verhältnis von einfallender zu reflektierter Welle besteht. Sofern also nicht ausgezeichnete Fermatsche Kurven betrachtet werden, gibt jede hindurchgehende Welle, wie schon Behrens für den geschichteten Isolator gezeigt hat, zu einer reflektierten Welle Anlaß.

Wir haben in diesem Paragraphen nur die Gleichung (25), und damit die Wellen erster Art behandelt. In genau der gleichen Weise läßt sich die Berechnung des Feldes für die Wellen zweiter Art an die Gleichung (25a) anknüpfen.

Die gewonnenen Resultate gestatten, das Verhalten der Lösung für alle reellen Werte von x zu übersehen, und wir können nun dazu übergehen, die Reflexion an der Grenze eines Mediums der untersuchten Art zu studieren.

§ 5. Reflexion am geschichteten Halbleiter

Wir nehmen an, daß in der Ebene $x = 0$ ein Schichtkörper von der bisher betrachteten Art (für $x > 0$) mit einem homogenen Dielektrikum (für $x < 0$) zusammenstößt; letzteres habe die Dielektrizitätskonstante ϵ_0 und die Permeabilität μ_0 , also den Brechungsindex $n_0 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Eine ebene, in der x, y -Ebene polarisierte Welle falle in der x, y -Ebene als Einfallsebene unter dem Winkel $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ gegen die Grenzfläche; gefragt wird nach dem Feld im Innern des Schichtkörpers und nach der im Dielektrikum auftretenden reflektierten Welle.

Führen wir in Übereinstimmung mit (2) die Bezeichnungen

$$(45) \quad l_0 = n_0 \cos \vartheta_0, \quad m_0 = n_0 \sin \vartheta_0$$

ein, so ist im Dielektrikum ($x \leq 0$) für die einfallende Welle zu setzen

$$(46) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z^e = E e^{-i\nu \left(t - \frac{l_0 x + m_0 y}{c}\right)}; & \mathfrak{H}_x^e = \frac{m_0}{\mu_0} E e^{-i\nu \left(t - \frac{l_0 x + m_0 y}{c}\right)}, \\ \mathfrak{H}_y^e = -\frac{l_0}{\mu_0} E e^{-i\nu \left(t - \frac{l_0 x + m_0 y}{c}\right)}, \end{cases}$$

und für die reflektierte Welle

$$(47) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z^r = R e^{-i\nu \left(t - \frac{-l_0 x + m_0 y}{c}\right)}; & \mathfrak{H}_x^r = \frac{m_0}{\mu_0} R e^{-i\nu \left(t - \frac{-l_0 x + m_0 y}{c}\right)}, \\ \mathfrak{H}_y^r = \frac{l_0}{\mu_0} R e^{-i\nu \left(t - \frac{-l_0 x + m_0 y}{c}\right)}. \end{cases}$$

Dabei bedeuten E und R die entsprechenden Amplitudenfaktoren.

Für das Innere des Schichtkörpers ($x \geq 0$) ist die oben gewonnene Lösung (21) anzusetzen.

Die von den Grenzbedingungen geforderte Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} an der Ebene $x = 0$ liefert die Parameterbestimmung

$$(48) \quad m = m_0, \quad l = + \sqrt{n^2 - m_0^2}$$

und die Amplitudenbeziehungen

$$(49) \quad \begin{cases} E + R = F_1^0 + F_2^0 \\ \frac{l_0}{\mu_0} (E - R) = \frac{l^0}{\mu^0} (F_1^0 - F_2^0). \end{cases}$$

Der obere Index 0 bedeutet, daß die betreffende Größe im Schichtkörper an der Stelle $x = 0$ zu nehmen ist. Nun ist nach (28) $\lim_{x=0} \xi = 0$, also nach (24), (32) und (39a)

$$(50) \quad \begin{cases} F_1^0 + F_2^0 = \lim_{x=0} F = \lim_{\xi=0} e^{H\xi} (C_1 e^{i\nu\xi} + C_2 e^{-i\nu\xi}) \\ = e^{H^0} (C_1 + C_2) \end{cases}$$

und nach (22), (41), (38), (28)

$$(51) \quad \begin{cases} F_1^0 - F_2^0 = \lim_{x=0} \left(-\frac{ic}{\nu l} \frac{dF}{dx} \right) \\ = -\frac{ic}{\nu l^0} e^{H^0} \left[\frac{i\nu l^0}{c} (C_1 - C_2) + \left(\frac{dH}{dx} \right)^0 (C_1 + C_2) \right]. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in (49) ein, so muß also sein:

$$(52) \quad E + R = e^{H^0}(C_1 + C_2)$$

$$(53) \quad \frac{l_0}{\mu_0}(E - R) = -\frac{ic}{r\mu^0} e^{H^0} \left[\frac{i\nu l^0}{c}(C_1 - C_2) + \left(\frac{dH}{dx} \right)^0 (C_1 + C_2) \right].$$

Damit sind erst zwei Gleichungen für die Bestimmung der drei Unbekannten R , C_1 und C_2 gegeben. Es kommt aber die Forderung hinzu, daß keine Energie aus dem positiv Unendlichen einfallen soll, und das hat nach S. 13 u. 14 ein ganz bestimmtes Verhältnis $\frac{C_2}{C_1} = \alpha$ zur Folge. Aus den drei Gleichungen (52), (53) und (44a) sind die Unbekannten berechenbar; insbesondere ergibt sich

$$(54) \quad \frac{R}{E} = \frac{(1 + \alpha)\mu^0 l_0 - (1 - \alpha)\mu_0 l^0 + \frac{ic}{r}\mu_0(1 + \alpha)\left(\frac{dH}{dx}\right)^0}{(1 + \alpha)\mu^0 l_0 + (1 - \alpha)\mu_0 l^0 - \frac{ic}{r}\mu_0(1 + \alpha)\left(\frac{dH}{dx}\right)^0}.$$

Da nach (32a) und (48)

$$(55) \quad \frac{dH}{dx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \frac{dl}{dx} - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{d\tilde{n}^2}{dx}}{\tilde{n}^2 - m_0^2} - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx} \right)$$

ist, hängt die reflektierte Energie $J_r = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |R|^2$ also nicht nur vom Einfallswinkel und von den Anfangswerten ϵ^0 , μ^0 , σ^0 , sondern auch noch von den Anstiegswerten $\left(\frac{d\epsilon}{dx}\right)^0$, $\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^0$, $\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^0$ und von dem Quotienten α ab. Namentlich der Einfluß des letzteren ist typisch für das inhomogene Medium. Denn die Definition von α setzt die Kenntnis des Schichtkörpers von $x = 0$ bis $x = +\infty$ voraus, und wenn auch in (44a) ein expliziter Ausdruck für α vorliegt, so wird sich die numerische Berechnung im allgemeinen erst durchführen lassen, wenn die Differentialgleichung (33) [bzw. (25) oder (29)] in handlicherer Form integriert ist.¹⁾

Daß für die Berechnung der reflektierten Energie nicht nur die Kenntnis des Schichtkörpers in der Nachbarschaft der Grenzebene, sondern auch der Funktionen ϵ , μ , σ von $x = 0$

1) Man vgl. zu diesem Punkte die Rechnungen im letzten Paragraphen.

bis $x = +\infty$ erforderlich ist, läßt sich vom physikalischen Standpunkt aus leicht verstehen; denn im inhomogenen Medium findet eben Reflexion nicht nur an der Grenze des Mediums, sondern überall statt, und die austretende reflektierte Energie setzt sich aus all den Teilbeträgen zusammen, die aus verschiedener Tiefe bis zur Oberfläche zurückgelangen.

§ 6. Bedingungen für das „Schwarzsein“

Jetzt sind wir in der Lage, die Bedingungen anzugeben, denen ein Schichtkörper zu genügen hat, wenn er als „schwarz“ gelten soll. Er darf dann erstens kein Licht reflektieren, und er muß zweitens alles eindringende Licht absorbieren. Daraus ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung

$$(56) \quad (1 + \alpha) \mu^0 l_0 - (1 - \alpha) \mu_0 l^0 + \frac{i e \mu_0}{\nu} (1 + \alpha) \left(\frac{dH}{dx} \right)^0 = 0,$$

wobei α aus der Forderung (44), d. h. gemäß (44a) zu bestimmen ist.

Die Gleichung (56) enthält bei festem m_0 nur zwei Forderungen an die sechs Größen ε^0 , μ^0 , σ^0 , $\left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right)^0$, $\left(\frac{d\mu}{dx} \right)^0$, $\left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^0$; man wird also bei gegebenem Einfallswinkel im allgemeinen¹⁾ noch bei beliebigem Verlauf der Funktionen ε , μ , σ durch mannigfache Annahmen über die Anfangswerte die Reflexion zum Verschwinden bringen können. Aber die Definition des schwarzen Körpers verlangt diese Eigenschaft für *jeden* Einfallswinkel, und daher muß die Gleichung (56) *identisch* in ϑ_0 erfüllt sein. Dabei ist zu berücksichtigen, daß ϑ_0 nicht nur über l und $\frac{dH}{dx}$, sondern auf dem Wege über die Lösung (35) auch in α eingeht. Versucht man daher, aus (56) *notwendige* Bedingungen abzuleiten, die frei von ϑ_0 sind, so begegnet man der Schwierigkeit, daß die Abhängigkeit der Konstanten α von ϑ_0 unübersehbar kompliziert ist [Formel (44a)].

Wir müssen uns darum damit begnügen, *hinreichende* Bedingungen für das Verschwinden des Ausdrucks (56) anzugeben. Man überzeugt sich leicht, daß die vier Bedingungen

1) Eine gewisse Einschränkung ist erforderlich, weil nur solche Werte zugelassen werden können, die in Übereinstimmung mit den Voraussetzungen (vgl. S. 5) sind.

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & \mu^0 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \mu, \quad \text{c)} \quad (\tilde{n}^2)^0 = n_0^2, \\ \text{b)} & \left(\frac{d\mu}{dx} \right)^0 = 0, \quad \text{d)} \quad \left(\frac{d\tilde{n}^2}{dx} \right)^0 = 0 \end{array} \right.$$

wegen (48) und (55) das Zutreffen von (56) zur Folge haben.

Es fragt sich nun weiter, ob diesen Bedingungen durch passende Annahmen über ε , μ , σ genügt werden kann. Offenbar verlangen die Bedingungen (57 b, c, d)

$$(58) \quad \sigma^0 = \left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right)^0 = \left(\frac{d\mu}{dx} \right)^0 = \left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^0 = 0;$$

bei der Diskussion von (57a) ist aber zu berücksichtigen, daß α im allgemeinen von ε^0 , μ^0 und ϑ_0 abhängen wird.¹⁾ Will man also zu einer Bestimmung von μ^0 gelangen, die unabhängig von ϑ_0 ist, so muß man zunächst fordern, daß α nicht von ϑ_0 abhängt; d. h.

$$(57) \quad \text{e)} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta_0} = 0.$$

Trifft das zu²⁾, so vervollständigen die beiden Gleichungen:

$$(58a) \quad \mu^0 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \mu_0, \quad \varepsilon^0 = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \varepsilon_0$$

den erforderlichen Ansatz.

Bevor wir weiter untersuchen, ob die Gleichungen (58a) eine physikalisch zulässige Lösung darstellen, ist es nötig, die analogen Bedingungen für Wellen zweiter Art (die also senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sind) aufzustellen. In diesem Falle ergeben sich die Formeln für die reflektierte Energie und ihr Verschwinden aus (54) und (56), wenn man μ mit $\tilde{\varepsilon}$ vertauscht. Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß die Lösung jetzt an die Differentialgleichung (25a) anzuknüpfen hat; die Vertauschung ist also auch in H bzw. $\frac{dH}{dx}$ [Formel (55)] vorzunehmen, und an die Stelle von α tritt im allgemeinen eine andere Konstante α' .

1) Man vgl. dazu das Beispiel auf S. 22 ff.

2) Es ist leicht zu zeigen, daß unter der Annahme (57e) die Bedingungen (57a—d) notwendig sind. Man braucht dafür nur vermöge (55) und $l_0 = \sqrt{n_0^2 - m_0^2}$, $l^0 = \sqrt{\tilde{n}^{02} - m_0^2}$ die Bedingungsgleichung (56) nach Potenzen von $m_0^2 = n_0^2 \sin^2 \vartheta_0$ zu entwickeln und die einzelnen Koeffizienten gleich Null zu setzen.

Auf diese Weise erhalten wir statt (57a und b)

$$(57) \quad f) \tilde{\varepsilon}^0 = \frac{1 - \alpha'}{1 + \alpha'} \varepsilon_0, \quad g) \left(\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dx} \right)^0 = 0,$$

während (57c und d) unverändert bleiben. Um den neuen Bedingungen zu genügen, muß man wieder gemäß (58) verfügen, an Stelle von (58a) ergibt sich aber

$$(58b) \quad \varepsilon^0 = \frac{1 - \alpha'}{1 + \alpha'} \varepsilon_0, \quad \mu^0 = \frac{1 + \alpha'}{1 - \alpha'} \mu_0,$$

und diese Forderungen sind nur dann mit (58a) verträglich, wenn

$$(57) \quad h) \alpha' = -\alpha,$$

ist. Damit ist aber noch immer nicht ein physikalisch zulässiges Resultat sichergestellt; denn die Auflösung von (58a) [bzw. (58b)] kann zu komplexen oder negativen Werten von ε^0 und μ^0 führen. Hält man aber an der zu Beginn (vgl. S. 5) ausgesprochenen Voraussetzung $\varepsilon \geq 1$, $\mu \geq 1$ fest¹⁾, so präzisiert sich (57, h) zu

$$(59) \quad \alpha = \alpha' = 0, \quad \text{für alle } \vartheta_0,$$

woraus dann schießlich

$$(60) \quad \varepsilon^0 = \varepsilon_0, \quad \mu^0 = \mu_0$$

folgt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Beziehungen (58) und (60), das heißt also: *Stetigkeit der Funktionen ε , μ , σ und ihrer ersten Differentialquotienten*, hinreichend sind, das Schwarzsein des Schichtkörpers sicherzustellen, vorausgesetzt nur, daß der Forderung (59) genügt ist.

Während nun den Bedingungen (58) und (60), die sich nur auf die Grenzfläche beziehen, stets genügt werden kann, stellt (59) in der schon früher (S. 16) ausgeführten Weise eine Forderung an den Aufbau des Schichtkörpers von $x = 0$ bis $x = \infty$ dar. Diese Forderung ist aber viel zu unübersichtlich [man vgl. Formel (44a)], als daß man aus ihr unmittelbar entscheiden könnte, ob es spezielle Schichtungsgesetze gibt, die ihr genügen. Daß die Bedingung (59) nicht an sich widerspruchsvoll ist, geht daraus hervor, daß homogene Halbleiter

1) Diese Einschränkung ist nicht wesentlich; wir hätten auch voraussetzen dürfen, daß ε und μ eine positive untere Grenze < 1 haben.

ihr genügen; es bleibt aber die Frage offen, ob es inhomogene Schichtkörper mit den Anfangswerten $\sigma^0 = 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^0 = 0$ gibt, die im Einklang mit (59) sind. Der homogene Halbleiter reflektiert, wie bekannt, unter allen Umständen, und zwar hat das seinen Grund darin, daß ein absorbierendes homogenes Medium nicht der Bedingung $\sigma^0 = 0$ genügen kann.

Während wir es demnach dahingestellt sein lassen müssen, ob es Schichtkörper gibt, die in mathematischer Strenge als schwarz zu bezeichnen sind, geben die von uns gewonnenen Bedingungen die Mittel an die Hand, um Schichtkörper zu konstruieren, die näherungsweise schwarz sind. In den letzten zwei Paragraphen werden wir uns kurz mit zwei solchen Beispielen beschäftigen.

§ 7. Erstes Beispiel

Wie wir eben ausgeführt haben, besteht die Hauptschwierigkeit darin, der Bedingung (59) zu genügen. Nun ist diese Bedingung einerseits für den homogenen Halbleiter erfüllt, andererseits auch für den beliebigen Schichtkörper, soweit man sich auf die erste Näherung [vgl. (40) und (39a)]

$$(61) \quad F = e^H [C_1 e^{i\nu z} + C_2 e^{-i\nu z}]$$

beschränkt. Es liegt daher nahe, den Aufbau eines schwarzen Körpers in der Weise zu versuchen, daß man zwischen das Dielektrikum und einen homogenen Halbleiter eine passend gewählte inhomogene Schicht einschaltet und ihre Dicke so bemißt, daß (61) eine ausreichende Approximation darstellt.

Wir nehmen also wie bisher an, daß von $x = -\infty$ bis $x = 0$ ein homogenes Dielektrikum (ε_0, μ_0) dem zu untersuchenden Körper vorgelagert ist; hier soll der Ansatz (46) und (47) gelten. Von $x = 0$ bis $x = d$ reicht die inhomogene Schicht, in der die Lichtbewegung durch (21) dargestellt wird. Endlich im Bereich von $x = d$ bis $x = \infty$ befindet sich ein homogener Halbleiter mit den Konstanten $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$; für ihn machen wir den Ansatz [man vgl. (1)]

$$(62) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = D e^{-i\nu \left(t - \frac{l_1 x + m_1 y}{c}\right)}, & \mathfrak{H}_z = \frac{m_1}{\mu_1} D e^{-i\nu \left(t - \frac{l_1 x + m_1 y}{c}\right)}, \\ \mathfrak{H}_y = -\frac{l_1}{\mu_1} D e^{-i\nu \left(t - \frac{l_1 x + m_1 y}{c}\right)}, \end{cases}$$

der bereits der erforderlichen Bedingung im Unendlichen genügt.

Die Grenzbedingungen liefern zunächst die Parameterbestimmung (48), sowie

$$(63) \quad m_1 = m_0, \quad l_1 = + \sqrt{\tilde{n}_1^2 - m_0^2},$$

wenn \tilde{n}_1^2 der Brechungsindex ist, der nach (3) zu dem Halbleiter $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ gehört.

Wählen wir im Inneren der inhomogenen Schicht für $F = F_1 + F_2$ die Näherungslösung (61) und behalten ξ als Variable bei, so wird nach (22) und (28)

$$(64) \quad \begin{cases} F_1 - F_2 = -\frac{i}{\nu} \frac{dF}{d\xi} \\ = e^H \left[C_1 \left(1 - \frac{i}{\nu} \frac{dH}{d\xi} \right) e^{i\nu\xi} - C_2 \left(1 + \frac{i}{\nu} \frac{dH}{d\xi} \right) e^{-i\nu\xi} \right]. \end{cases}$$

Daher ergeben sich folgende Grenzbedingungen: bei $x = 0$

$$E + R = e^{H^0} (C_1 + C_2)$$

$$(65) \quad \begin{cases} \frac{l_0}{\mu_0} (E - R) \\ = \frac{l^0}{\mu^0} e^{H^0} \left[C_1 \left(1 - \frac{i}{\nu} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^0 \right) - C_2 \left(1 + \frac{i}{\nu} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^0 \right) \right] \end{cases}$$

und bei $x = d$

$$(66) \quad \begin{cases} C_1 e^{H^1 + i\nu\xi^1} + C_2 e^{H^1 - i\nu\xi^1} = D e^{\frac{i\nu}{c} l_1 d} \\ \frac{l^1}{\mu^1} e^{H^1} \left[C_1 e^{i\nu\xi^1} \left(1 - \frac{i}{\nu} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^1 \right) - C_2 e^{-i\nu\xi^1} \left(1 + \frac{i}{\nu} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^1 \right) \right] = \frac{l_1}{\mu_1} D e^{\frac{i\nu}{c} l_1 d}. \end{cases}$$

Der obere Index 1 bedeutet (analog S. 15), daß die betreffende Größe in der inhomogenen Schicht für $x = d$ zu nehmen ist.

Aus den vier Gleichungen (65), (66) ergibt sich

$$(67) \quad \frac{R}{E} = \frac{l_0 \mu^0 (1 + \alpha) - l^0 \mu_0 \left[(1 - \alpha) - (1 + \alpha) \frac{i}{\nu} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^0 \right]}{l_0 \mu^0 (1 + \alpha) - l^0 \mu_0 \left[(1 - \alpha) - (1 + \alpha) \frac{i}{\nu} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^0 \right]},$$

wobei

$$(68) \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1} = - \frac{l_1 \mu^1 - l^1 \mu_1 \left(1 - \frac{i}{\nu} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^1 \right)}{l_1 \mu^1 + l^1 \mu_1 \left(1 + \frac{i}{\nu} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^1 \right)}$$

gesetzt ist.

Man erkennt nun sofort, daß man durch die Annahmen

$$(69a) \quad \mu^0 = \mu_0, \quad l^0 = l_0, \quad \left(\frac{dH}{d\xi}\right)^0 = 0$$

und

$$(69b) \quad \mu^1 = \mu_1, \quad l^1 = l_1, \quad \left(\frac{dH}{d\xi}\right)^1 = 0$$

α und damit auch R zum Verschwinden bringen kann. Für das Zutreffen von 69a, b ist aber [man vgl. (48), (55), (63)] die Stetigkeit von ε, μ, σ und ihrer ersten Differentialquotienten an beiden Grenzflächen hinreichend. Im übrigen kann der Verlauf dieser Funktionen im Inneren der inhomogenen Schicht beliebig sein.¹⁾ Unter den gleichen Annahmen verschwindet auch — wegen der Symmetrie in $\bar{\varepsilon}$ und μ — die senkrecht zur Einfallsebene polarisierte reflektierte Welle.

Es muß jetzt nur noch die Frage aufgeworfen werden, mit welcher Näherung die von uns benutzte Näherungsformel (61) die strenge Lösung darstellt. Da die Reihe (55) konvergiert, ergibt sich eine Abschätzung des Fehlers zugleich mit dem Konvergenzbeweis. Es zeigt sich, daß der Fehler in f von der Ordnung

$$(70) \quad \frac{e^{\nu \bar{\xi}_2} \frac{1}{\nu} \int_0^{\bar{\xi}(d)} |a d \xi|}{1 - \frac{1}{\nu} \int_0^{\bar{\xi}(d)} |a d \xi|}, \quad \bar{\xi}(d) = \frac{1}{c} \int_0^d l dx,$$

ist. Man kann also durch Verkleinerung von $|a|$ und d (oder durch Vergrößerung von ν) stets erreichen, daß der Fehler unter jeden gewünschten Betrag herabgedrückt wird, und unser Modell stellt dann einen schwarzen Körper mit beliebiger Näherung dar.

§ 8. Zweites Beispiel

Als zweites Beispiel behandeln wir einen relativ einfachen Fall, in dem sich die Integration — wenigstens für die eine Polarisationsrichtung — ohne Vernachlässigungen durchführen läßt. Dadurch werden die allgemeinen, in § 4 dargelegten

1) Stetigkeit und zweimalige stetige Differenzierbarkeit ist natürlich vorauszusetzen.

Verhältnisse veranschaulicht, und zugleich läßt sich aus dem Schlußresultat ableiten, unter welchen physikalischen Bedingungen die reflektierte Energie zu vernachlässigen ist.

Um in Übereinstimmung mit den Bedingungen (58) zu bleiben, setzen wir für $x = 0$ bis $x = \infty$

$$(71) \quad \mu = \mu_0, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon_0 + (w_1 + i w_2)^2 x^2,$$

d. h. also

$$(71a) \quad \epsilon = \epsilon_0 + (w_1^2 - w_2^2) x^2; \quad \sigma = \frac{\nu}{2\pi} w_1 w_2 x^2;$$

w_1 und w_2 sollen positive Konstante sein, die der Einschränkung $w_1 \geq w_2 > 0$ unterliegen.

Dann wird nach (48) und (45)

$$(72) \quad l^2 = \tilde{n}^2 - m^2 = \tilde{n}^2 - m_0^2 = l_0^2 + \mu_0 (w_1 + i w_2)^2 x^2.$$

Führt man die Abkürzungen

$$(73) \quad \frac{\nu l_0}{c} = a, \quad \frac{\nu \sqrt{\mu_0}}{c} (w_1 + i w_2) = b = b_1 + i b_2$$

ein, so wird aus der Differentialgleichung (25)

$$(74) \quad \frac{d^2 F}{dx^2} + (a^2 + b^2 x^2) F = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich durch die Substitution

$$(75) \quad x^2 = 2 \xi$$

auf die Form einer Laplaceschen Differentialgleichung¹⁾ bringen

$$(76) \quad \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{dF}{d\xi} + \left(b^2 + \frac{a^2}{2\xi}\right) F = 0$$

und ist dann durch ein Integral auf komplexem Wege lösbar. Man findet

$$(77) \quad F = \int_L e^{z\xi} (z - i b)^{r_1-1} (z + i b)^{r_2-1} dz;$$

dabei ist

$$(78) \quad r_1 = \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4ib}, \quad r_2 = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4ib}$$

1) Man vgl. etwa L. Schlesinger: Einführung in die Theorie der Diff.-Gl. II. Aufl. 1904. S. 202ff. Die Rechnungen, die zu den Ergebnissen im Text führen, sind in der Diss. Dailidé § 9 ausgeführt.

gesetzt. Als Integrationsweg L kommt entweder eine Doppelschleife um die beiden Punkte $+ib$ und $-ib$ in Frage, oder einfache Schleifen, die im Unendlichen beginnen und um einen der beiden Punkte herumführen. Je nach der Wahl des Weges erhält man drei partikuläre Integrale, von denen je zwei voneinander linear unabhängig sind.

Um der Forderung $C_z^\infty = 0$ zu genügen (S. 13), haben wir den Integrationsweg so zu wählen, daß F für $x = +\infty$ verschwindet; es zeigt sich, daß L parallel mit der realen negativen z -Achse aus dem Unendlichen kommen, bis dicht an den Punkt $+ib$ herangehen, diesen etwa in Form eines kleinen Kreises im negativen Sinne umschließen und dann wieder parallel mit der negativen Richtung der realen z -Achse sich ins Unendliche entfernen muß.

In der Nachbarschaft des 0-Punktes ist die Lösung von (74) durch

$$(79) \quad F = C_1 e^{iax} + C_2 e^{-iax}$$

gegeben, und es handelt sich jetzt darum, das Verhältnis $\alpha = C_2/C_1$ zu bestimmen, das der eben angegebenen Wahl von L in der Lösung (77) entspricht.

Nach der allgemeinen Theorie läßt sich (76) in der Umgebung von $\xi = 0$ in eine Reihe der Form

$$(80) \quad F = a_0 + a_1 \xi^{1/2} + a_2 \xi + \dots$$

entwickeln. Daraus ergibt sich

$$(81) \quad a_0 = \lim_{\xi \rightarrow 0} F = \int_L (z - ib)^{r_1-1} (z + ib)^{r_2-1} dz$$

und

$$(82) \quad \begin{cases} a_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{F - a_0}{\xi^{1/2}} \\ = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{-1/2} \int_L (e^{2\pi i z} - 1) (z - ib)^{r_1-1} (z + ib)^{r_2-1} dz. \end{cases}$$

Die beiden komplexen Integrale lassen sich auswerten und liefern:

$$(83) \quad \begin{cases} a_0 = -(1 - e^{2\pi i r_2}) (-2ib)^{-1/2} \frac{\Gamma(r_2) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(r_2 + \frac{1}{2})} \\ a_1 = -2i \sqrt{\pi} (1 + e^{2\pi i r_2}). \end{cases}$$

Nunmehr erhält man aus dem Vergleich von (79) und (80) unter Berücksichtigung von (83)

$$(84) \quad \left\{ \alpha = \frac{C_2}{C_1} = - \frac{1 - \left(\frac{a^2}{-4ib} \right)^{1/2} \frac{1 - e^{2\pi i r_2}}{1 + e^{2\pi i r_2}} \frac{I(r_2)}{I(r_2 + \frac{1}{2})}}{1 + \left(\frac{a^2}{-4ib} \right)^{1/2} \frac{1 - e^{2\pi i r_2}}{1 + e^{2\pi i r_2}} \frac{I(r_2)}{I(r_2 + \frac{1}{2})}} \right\};$$

dabei gibt α , wie aus (54) oder aus (79) hervorgeht, zugleich das Verhältnis R/E .

Man erkennt aus (84), daß α von $\frac{a^2}{4ib}$, d. h. von ϵ^0, μ^0 und ϑ_0 abhängt, wie es auf S. 18 behauptet wurde.

Von Interesse sind noch die Grenzwerte von (84) für große und kleine Werte von w_1, w_2 . Ist $\left| \frac{a^2}{4ib} \right| \ll 1$, so kann man $r_2 = \frac{1}{4}$ setzen und erhält in erster Näherung

$$(85) \quad \frac{R}{E} = \frac{C_2}{C_1} = - \left(1 - \left(\frac{a^2}{-4ib} \right)^{1/2} \frac{1}{1 +} \frac{I(\frac{1}{4})}{I(\frac{3}{4})} \right).$$

Wachsen w_1 und w_2 über alle Grenzen, so ergibt sich also

$$(85a) \quad \frac{R}{E} = -1, \quad \left| \frac{R}{E} \right|^2 = 1.$$

Ist umgekehrt $\left| \frac{a^2}{4ib} \right| \gg 1$, so wird in erster Näherung

$$(86) \quad \frac{R}{E} = -e^{2\pi i r_2}$$

und daher

$$(86a) \quad \left| \frac{R}{E} \right|^2 = e^{-\frac{\pi \epsilon_0 \sqrt{\mu_0} \cos^2 \vartheta w_1}{c \cdot (w_1^2 + w_2^2)}}.$$

Danach hängt das Reflexionsvermögen des von uns studierten speziellen Schichtkörpers wesentlich von der Größe der dimensionslosen Zahl

$$Z = \left| \frac{a^2}{4ib} \right| = \frac{\pi \epsilon_0 \sqrt{\mu_0} \cos^2 \vartheta}{2\lambda \sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$$

ab (λ = Wellenlänge). Ist diese Zahl klein, und das bedeutet, daß wenigstens eine der Größen ϵ oder σ auf der Strecke einer Wellenlänge auf einen großen Betrag ansteigt, so nähern sich die Verhältnisse nach (85a) denen, wie sie bei der Re-

flexion an einem idealen Leiter herrschen. Ist umgekehrt der Anstieg auf der Strecke einer Wellenlänge nicht merklich, so daß Z eine große Zahl ist, dann ist die reflektierte Energie klein wie $e^{-\frac{4\pi Z w_1}{w_1^2 + w_2^2}}$. Ein solcher Körper kann also als praktisch schwarz angesprochen werden.

Die gewonnenen Resultate lassen sich *nicht* ohne weiteres auf den Fall von Wellen übertragen, die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sind, weil unsere Annahmen (71) nicht symmetrisch in $\tilde{\epsilon}$ und μ sind; es kann aber kaum zweifelhaft sein, daß dann ähnliche Verhältnisse statthaben.

Gießen, Institut für theoretische Physik, März 1929.

(Eingegangen 23. März 1929)

Über die Absorption Hertzscher Wellen in ionisierten Gasen

Von Hermann Dänzer

(Mit 22 Figuren)

Einleitung

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war die Frage nach der Möglichkeit einer experimentellen Nachahmung der beim Eintritt elektromagnetischer Wellen in die Heavisideschicht beobachteten Erscheinungen. Schickt man ein Bündel Hertzscher Wellen von der Erdoberfläche schräg nach oben, so beobachtet man bekanntlich, daß diese Strahlung in beträchtlicher Entfernung vom Ort des Senders wieder zum Vorschein kommt. Wir müssen also annehmen, daß die Wellen in einer gewissen Höhe gebrochen und total reflektiert worden sind, also eine krummlinige Bahn beschrieben haben.

Ein derartiges Verhalten der elektrischen Wellen ist aber nur möglich, wenn in großen Höhen der Brechungsexponent nach oben hin abnimmt und kleiner als eins wird. Dies kann der Fall sein, wenn Ionen oder Elektronen in genügender Zahl vorhanden sind, die durch verschiedene Wirkungen entstehen können (Ultraviolett-Strahlung, durchdringende Strahlung, eventuell Korpuskularstrahlung). Durch das Mitschwingen der vom elektrischen Feld der Welle erfaßten Ladungsträger erhält man einen Brechungsexponenten kleiner als eins. Ob im Falle der für die drahtlose Telegraphie wichtigen Heavisideschicht Elektronen oder Ionen die Hauptrolle spielen, ist für das Folgende belanglos. Ist die Dichte des ionisierten Gases sehr klein, so daß die Zusammenstöße der Ladungsträger mit Gasatomen zu vernachlässigen sind, gehen die Wellen ohne Schwächung durch das Medium hindurch, ist aber die Dichte hinreichend hoch, so wird der Welle durch die Zusammenstöße Energie entzogen, man beobachtet Absorption.

Die Theorie liefert für den Brechungsexponenten n und den Absorptionskoeffizienten μ folgende Werte:

$$1 - n^2 = \frac{1}{\pi c^2} \frac{N e^2}{m} \lambda^2$$

$$\mu = \frac{1}{2 \pi c^3} \frac{N e^3}{m} \cdot Z \cdot \lambda^2,$$

wo N die Zahl der Ionen im Kubikzentimeter, e und m ihre Ladung bzw. ihre Masse und Z die Stoßzahl eines Ions pro Sekunde bedeuten.

In der vorliegenden Arbeit wurde nun der Versuch unternommen, die Beeinflussung Hertzscher Wellen kleiner Wellenlänge (etwa 4 cm) beim Durchgang durch elektrisch erregte Gase nachzuweisen und quantitativ zu verfolgen. Dabei wurde besonders der *Absorptionseffekt* näher untersucht, der schon bei geringer Schichtdicke des ionisierten Gases nachzuweisen ist.

Schon hier mag betont werden, daß ein unmittelbarer Vergleich zwischen den Verhältnissen der Heavisideschicht und denen der Laboratoriumsversuche nicht möglich ist.

In den durch elektrische Entladungen ionisierten Gasen ist die Zahl der Ionen und Elektronen von gleicher Größenordnung, so daß praktisch die Elektronen allein für die beobachteten Effekte verantwortlich zu machen sind. Bei Edelgasentladungen ist meist die Annahme berechtigt, daß die Elektronen von der Translation durch das elektrische Feld im Entladungsrohr abgesehen, eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung besitzen.¹⁾ Die Temperatur dieses Elektronengases kann je nach den Anregungsbedingungen sehr hoch sein (30000° und mehr), da die Elektronen beim elastischen Stoß mit Gasatomen nur einen sehr geringen Bruchteil ihrer kinetischen Energie verlieren. Die Stoßzahl und damit die Absorption der Strahlung ist also außerordentlich viel höher als in der Heavisideschicht, wo die Ionen mit den übrigen Gasatomen im Temperaturgleichgewicht stehen.

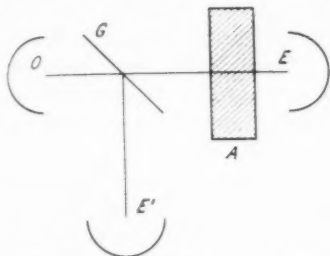
I. Experimenteller Teil

§ 1. Versuchsanordnung

Das Prinzip der Versuchsanordnung ist aus Fig. 1 ersichtlich. O bedeutet den Sender, A das durch elektrische

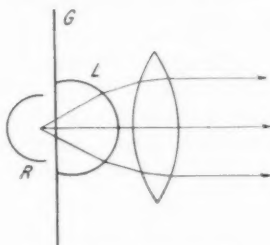
1) I. Langmuir, Phys. Rev. 26. S. 585. 1925.

Entladung ionisierte Gas und E den Empfänger. Über die Bedeutung der Glasplatte G und des Hilfsempfängers E' wird weiter unten näheres mitgeteilt. Beim Durchsetzen der ionisierten Gasschicht erleiden die Wellen eine Absorption, deren Größe mit der zu beschreibenden Anordnung gemessen werden konnte.



Schema der Versuchsanordnung

Fig. 1



Sender mit Linsensystem

Fig. 2

a) Der Sender (Fig. 2)

Als Oszillatoren dienten zwei Platinstifte von 1,4 mm Durchmesser und 4,5 mm Länge, die nach dem Vorgang Lebedews in Glasröhrchen eingeschmolzen waren. Am anderen Ende der Röhrchen war der Zuführungsdraht für die Luftfunkenstrecke zur Speisung des Oszillators eingeschmolzen. Es erwies sich als zweckmäßig, vor dem Einblasen der Platinstifte die Röhrchen an den Enden kugelig aufzublasen, um hier eine übermäßige Erhitzung des Glases durch die Luftfunkenstrecke zu vermeiden. Die Glasröhrchen waren auf einer dicken Platte aus Vulkanfaser so montiert¹⁾, daß eine Verstellung der im Petroleum befindlichen Oszillatorenfunkenstrecke möglich war. Der Petroleumblechtrug ein Glimmerfenster G , hinter dem der Oszillator arbeitete. Vor dem Glimmerfenster waren zwei Paraffinlinsen angebracht, von denen die eine halbkugelförmig ausgebildet war und mit ihrer planen Fläche direkt am Glimmerfenster anlag. Die ganze Anordnung glich einem Immersions-Mikroskopobjektiv, da der mit einem kleinen Reflektor R umgebene Oszillator in dem einen aplanatischen Punkt der Paraffinkugel saß, die wegen der Gleichheit des Brechungs-

1) W. Möbius, Ann. d. Phys. **62**. S. 296. Fig. 1. 1920.

exponenten von Paraffin und Petroleum mit dem Petroleum ein homogenes optisches System bildete. Es gelang so, die Strahlung des Senders weitgehend auszunützen.

Die Wellenlänge des Oszillators ergab sich interferometrisch zu 4,5 cm.

Der Sender wurde mit einem kleinen Induktor von etwa 2 cm Funkenlänge angeregt, der mit einem geeigneten Simonunterbrecher betrieben wurde. Anstatt des üblichen Porzellanrohres enthielt der Unterbrecher ein weites Reagenzglas mit einer feinen Öffnung von etwa 1 mm Durchmesser, so daß mit schwachem Strom gearbeitet werden konnte.

Mit dieser Anordnung wurde eine erhebliche Steigerung der Partialentladungen des Senders erzielt. Zur Vermeidung von Störungen wurde in den Sekundärkreis des Induktors ein Widerstand von 1 bis 3 Megohm eingebaut.

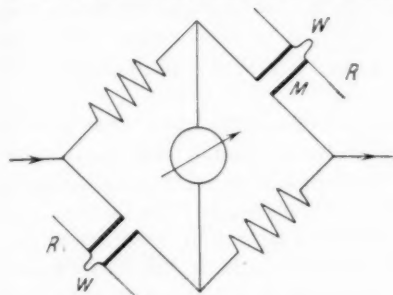
b) Der Empfänger

Bei Gelegenheit einer anderen Untersuchung, bei der die starke Absorption gewisser Flüssigkeiten sehr die Meßgenauigkeit beeinträchtigte, wurde erkannt, daß man die Empfindlichkeit der bisher üblichen Empfänger durch Benutzung des *Bolometerprinzipes* erheblich übertreffen kann. Zu diesem Zweck wurden zwei diametrale Zweige einer Wheatstoneschen Brücke als Resonatoren *R* (Fig. 3) ausgebildet. Trifft eine elektrische Welle auf die Resonatoren auf, so ändert sich deren Widerstand infolge der Erwärmung durch den Hochfrequenzstrom, das Gleichgewicht der Brücke wird also gestört.

Freilich muß man bei der Konstruktion des Bolometerresonators darauf bedacht sein, den Hochfrequenzstrom auf einen möglichst kleinen Raum zusammenzudrängen, um so maximale Temperaturerhöhung zu erzielen. Das wurde durch Verwendung von Wollastondrähten in einfacher Weise erreicht.

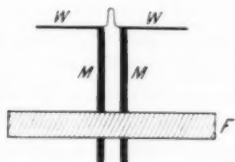
Die Konstruktion des Bolometerresonators geht aus der Abbildung der Figg. 3 und 4 hervor. Ein Wollastondraht *W*, der zunächst noch die Silberhülle trägt, wird in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise gebogen, und so an zwei in ein Fiberbrettchen im Abstand von 2 mm eingeschlagenen Messingstiftchen *M* verlötet, daß in der Mitte ein etwa 3 mm langes Schleifchen entsteht. Die beiden freien Enden des Wollaston-

drahtstückes W bilden die Antennen des Resonators, die nach Ätzung mit HNO_3 freigelegte Platinseele des Schleifchens von etwa $1\ \mu$ Dicke repräsentiert das Bolometersystem. Da die den



Brückenschaltung

Fig. 3

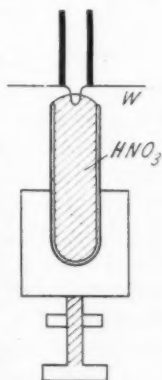


Bolometersystem

Fig. 4

Ruhestrom des Bolometers zuführenden Messingstützen M für die zu empfangende Hochfrequenz wie Drosseln wirken, kann sich an den Enden des Schleifchens eine Hochfrequenzspannung ausbilden. Falls nur Wollastondraht mit sehr dünnem Silbermantel zur Verfügung steht, empfiehlt es sich, an die freien Enden zur Verbesserung der Antennenwirkung kleine Silberbleche anzulöten.

Die Ätzung des Schleifchens geschah in der Weise, daß das Schleifchen in verdünnte Salpetersäure eingetaucht wurde, die konvex den Rand eines engen Glasröhrchens überdeckt (Fig. 5). Während der Ätzung muß der Widerstand der freigelegten Platinseele mit Hilfe einer Wheatstoneschen Brücke kontrolliert werden. Durch vorsichtiges Ätzen, am besten mit Hilfe einer Schraubenvorrichtung zur Feinverstellung des Salpetersäurespiegels (vgl. Fig. 5), gelingt es, den Widerstand der freigelegten Platinseele bis auf 1 Proz. eines gewünschten Betrages abzugleichen. Um Salpetersäurereste nach vollendeter Ätzung zu beseitigen, wurden die Schleifchen mit verdünntem Alkohol, der dem Wasser



Ätzvorrichtung

Fig. 5

wegen der geringeren Oberflächenspannung vorzuziehen ist, gewaschen.

Die verwendeten Bolometerschleifen hatten durchschnittlich einen Widerstand von $150\ \Omega$. Da die meisten Messungen mit Vakuumbolometern ausgeführt wurden, wurde das Bolometer in eine innen und außen mit Picein überzogene Hartgummikapsel eingesetzt.

Zur Erreichung eines konstanten Nullpunktes ist es vorteilhaft, nicht nur die zum Empfang bestimmten diametralen Zweige der Wheatstoneschen Brücke in einer solchen Kapsel unterzubringen, sondern auch die beiden anderen Zweige einzubauen. Diese beiden Systeme dürfen aber dann keine Antennen tragen, wenn nicht durch Abdeckung mit Blechstücken den Wellen der Zutritt versperrt ist. Sehr vorteilhaft zur Erreichung eines konstanten Nullpunktes erweist sich eine möglichst gute Abgleichung der vier Bolometerwiderstände, weil sich so Temperatureffekte ausgleichen. Dann aber kann man ohne weiteres Galvanometer mit einer Empfindlichkeit von 10^{-9} Amp. pro Millimeter verwenden.

§ 2. Meßmethode

Wurde der Sender mit Simonunterbrecher betrieben, so arbeitete das Bolometer störungsfrei. Die Störungen betrugen bei Ausschlägen von mehreren Metern höchstens 2 mm.

Da es aber natürlich sehr schwierig ist, die Strahlung eines Hertzschen Oszillators längere Zeit hindurch konstant zu halten, wurden die meisten Messungen ballistisch ausgeführt. Um sich von Schwankungen frei zu machen, benutzte man ferner einen zweiten Empfänger E^1) (vgl. Fig. 1), der mittels einer unter 45° gegen den Strahlengang geneigten Glasplatte G einen Teil der direkten Strahlung des Senders empfing, um die Intensität des jeweiligen Wellenimpulses zu kontrollieren. Die dabei notwendige Ablesung der Umkehrpunkte beider Galvanometer macht bei hinreichender Verschiedenheit der Schwingungszeiten keine Schwierigkeit.

Die Messung des Absorptionsvermögens A geht bei Vernachlässigung der Reflexion in folgender Weise vor sich: Zu-

1) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 38. S. 530. 1912.

nächst wird eine Welle durch das unerregte Gas hindurchgeschickt, die Ausschläge beider Galvanometer seien α_1 und α_1' , wobei sich die gestrichenen Größen auf das Kontrollgalvanometer beziehen. Die entsprechenden Ausschläge bei erregtem Gas seien α_2 und α_2' . Dann folgt

1. ohne Absorption $\alpha_1 = x J_1 d$; $\alpha_1' = x' J_1 r$,

2. mit Absorption $\alpha_2 = x J_2 d(1 - A)$; $\alpha_2' = x' J_2 r$,

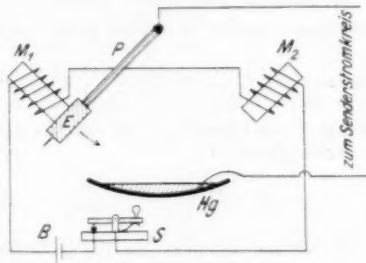
also

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{J_1}{J_2} \frac{1}{1 - A}; \quad \frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} = \frac{J_1}{J_2},$$

so daß folgt:

$$1 - A = \left(\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} \right) : \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right).$$

Um die Meßgenauigkeit weiter zu steigern, wurde die Dauer der ballistischen Anregung des Senders immer konstant



Kontaktpendel

Fig. 6

gehalten. Das geschah durch ein magnetisch gesteuertes Pendel P (Fig. 6), das einen Quecksilberkontakt betätigte. Wurde der Ruhestrom der Magnete M_1 und M_2 für einen Augenblick mit dem Morsetaster S unterbrochen, so wurde der Eisenkörper E des Pendels losgelassen und der Quecksilberkontakt trat in Funktion. Da inzwischen der Ruhestrom wieder eingeschaltet war, wurde der Pendelkörper von dem Magneten M_2 festgehalten.

Das eine Galvanometer mit geringer Schwingungsdauer arbeitete im aperiodischen Grenzzustand. Es wurde deshalb untersucht, unter welchen Bedingungen die Angaben eines solchen Instrumentes bei der benutzten Kontaktdauer von

0,1 bis 0,3 Sek. für die oben gegebene Meßmethode verwendbar sind, und welche Vorsichtsmaßregeln man einzuhalten hat. Die entsprechende Rechnung wurde ausgeführt und es möge genügen, das Resultat hier kurz wiederzugeben:

Ausgehend von der Differentialgleichung für das Galvanometer mit Dämpfung erhält man für den ersten ballistischen Ausschlag q_{\max} , wenn die Zeitdauer τ des Stromstoßes mit der Schwingungsdauer T vergleichbar wird:

$$q_{\max} = c j (e^x - 1) e^{-\frac{x}{1 - e^{-x}}},$$

dabei ist

$$x = 2 \pi \frac{\tau}{T};$$

c bedeutet die statische Galvanometerkonstante und j den in der Galvanometerspule fließenden Strom. Durch Entwicklung der Exponentialfunktionen erhält man angenähert

$$q_{\max} = c j \tau \frac{2 \pi}{T} e^{-1} \left(1 - \frac{5}{6} \pi^2 \frac{\tau^2}{T^2} \right).$$

Für den Fall geringer Dämpfung läßt sich die Rechnung viel einfacher ausführen: es ergibt sich¹⁾

$$q_{\max} = c j \tau \frac{2 \pi}{T} \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \frac{\tau^2}{T^2} \right).$$

Die prozentige Korrektur ist also im aperiodischen Fall fünfmal größer. Setzen wir die experimentellen Werte für τ und T ein ($\tau = 0,3$ Sek.; $T = 3$ Sek.), so ergeben sich Fehler bis zu 10 Proz. Man erkennt also, daß eine exakte Konstanz von τ unerlässlich war.

§ 3. Reflexions- und Absorptionsmessungen

Die ersten Messungen wurden an einer Röhre von der in Fig. 7 wiedergegebenen Form ausgeführt. Die Röhre hatte zylindrischen Querschnitt und die Gesamtlänge der Entladungsbahn betrug 3 m; der Abstand der übereinanderliegenden Teile der Röhre war kleiner als deren Durchmesser.

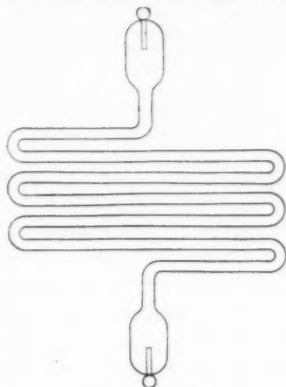
Die Röhre wurde mit reinem Neon-Heliumgemisch gefüllt und so montiert, daß die Ebene der Glasröhren um eine vertikale Achse gedreht werden konnte.

1) Vgl. F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Phys. 14. Aufl., S. 556.

Zum Betrieb diente Wechselstrom von 50 Perioden und die bei den Versuchen benutzte Stromdichte betrug etwa $0,3 \text{ Amp/cm}^2$.

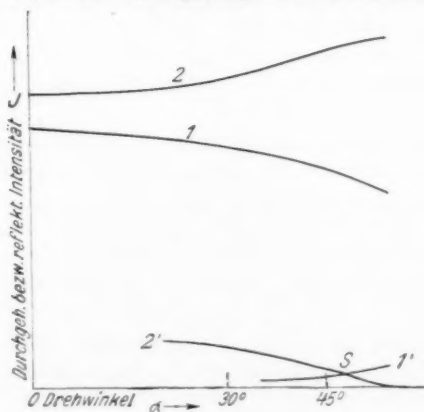
Zur Vermeidung von Störungen waren die beiden Empfänger, die Galvanometerleitung, die Galvanometer und der Sender in Blechkästen eingebaut.

Wurde die Ebene der Röhre von horizontal schwingenden Wellen durchsetzt, so wurde eine deutlich wahrnehmbare Absorption beobachtet, die etwa linear von der Stromstärke abhing. Die Absorption konnte aber durch Drehen der ionisierten Gasschicht erheblich gesteigert werden, was sich wohl aus der Vergrößerung der wirksamen Schichtdicke erklärt. Die Kurven 1 und 1' der Fig. 8 zeigen die durchgegangene bzw. reflektierte Inten-



Entladungsröhre

Fig. 7



Meßergebnisse mit der Entladungsröhre

Fig. 8

sität als Funktion des Drehwinkels. War die Röhre stromlos, so erhielt man die Kurven 2 bzw. 2', die deutlich das Brewster-

sche Minimum der reflektierten bzw. Maximum der durchgegangenen Intensität bei etwa 60° erkennen lassen. Um größere Winkel konnte die Röhre nicht gedreht werden, weil sonst ein Teil der direkten Strahlung in den Empfänger gelangt wäre. Das Brewstersche Minimum bzw. Maximum wird also zerstört, wenn die Entladungsröhre unter Strom steht.

Beachtenswert ist ferner die starke Schwächung der Reflexion, deren wahrer Verlauf aber wohl durch Interferenzen an der Gasschicht bzw. Glas reflektierten Welle verzerrt ist. Nur in einem Punkt, dem



Brewstersche Kurve an Paraffin

Fig. 9

Schnittpunkt *S* der beiden Reflexionskurven, erleidet die Reflexion durch Einschaltung des Stromes keine Änderung, hier kann man also ein Brewstersches Minimum der Reflexion an der ionisierten Gasschicht vermuten. Dem Schnittpunkt entspricht ein etwas gegen 1 größerer Brechungsexponent. Quantitative Erklärungsversuche werden in dem theoretischen Teil dieser Arbeit diskutiert.

Die Brauchbarkeit der Brewsterschen Methode zur Bestimmung des Brechungsexponenten bezeugt die an einer dicken Paraffinplatte aufgenommene Kurve Fig. 9 der durchgegangenen Intensität, deren Maximum sich genau mit dem theoretischen Wert deckt.

Störend wirkt bei diesen Versuchen der Einfluß der Wände des Entladungsrohres, vor allem aber die mangelhafte Homogenität der Gasschicht, beides Übelstände, die durch Ionisierung mit Hilfe des elektrodenlosen Ringstromes weitgehend

behothen wurden. Bei den im folgenden beschriebenen Versuchen wurden daher die Gase stets durch elektrodenlose Entladung ionisiert. Diese Anregungsmethode gestattet außerdem in einfacher Weise eine kräftige Ionisierung beliebiger Gase. Der bei den Versuchen benutzte Ringstromkolben hatte einen Durchmesser von 8 cm und war unmittelbar vor dem Hauptempfänger angebracht.

§ 4. Messungen der Lebensdauer des Absorptionseffektes

Die bis dahin erzielten Ergebnisse legten nahe, eine Lebensdauerermessung des Absorptionseffektes zu versuchen. Die Frage nach der Lebensdauer des Absorptionseffektes ist von hohem Interesse, da die Messung der Abklingung der Absorption nach Ausschaltung des Stromes im Entladungsrohr gleichbedeutend ist mit einer Messung der Lebensdauer der freien Elektronen¹⁾, die allein die Absorption verursachen (vgl. Einleitung).

Die Lebensdauerermessung muß im Prinzip so ausgeführt werden, daß man bestimmt, wie lange die Absorption nach Ausschaltung der Röhre noch anhält. Freilich genügt es im allgemeinen (aus Intensitätsgründen) nicht, diesen Versuch nur einmal auszuführen, vielmehr muß dieser Prozeß, wenn es sich um sehr kurze Lebensdauern handelt, in rascher Aufeinanderfolge wiederholt werden, so daß eine statische Messung möglich wird.

Das geschieht am einwandfreiesten mit der von Meissner und Graffunder²⁾ ursprünglich für optische Zwecke entwickelten Methode der phasenverschobenen Wechselströme: der eine Wechselstrom betreibt das Absorptionsrohr, der andere den Sender. Die Verspätung des Senderdurchschlags gegenüber dem Durchschlag³⁾ im Absorptionsrohr wird durch Änderung der Phasenverschiebung reguliert.

Eine gewisse Schwierigkeit bildet nur die unbedingt zu erfüllende Forderung, die Durchschläge des Senders und der Absorptionsröhre auf einen kurzen Moment zusammenzudrängen,

1) Vgl. auch M. L. Pool, Phys. Rev. **30**. S. 848. 1927.

2) K. W. Meissner u. W. Graffunder, Ann. d. Phys. **84**. S. 1009. 1927.

3) Es sei gestattet, die sehr kurz dauernde Entladung im Absorptionsgefäß auch im folgenden als „Durchschlag“ zu bezeichnen.

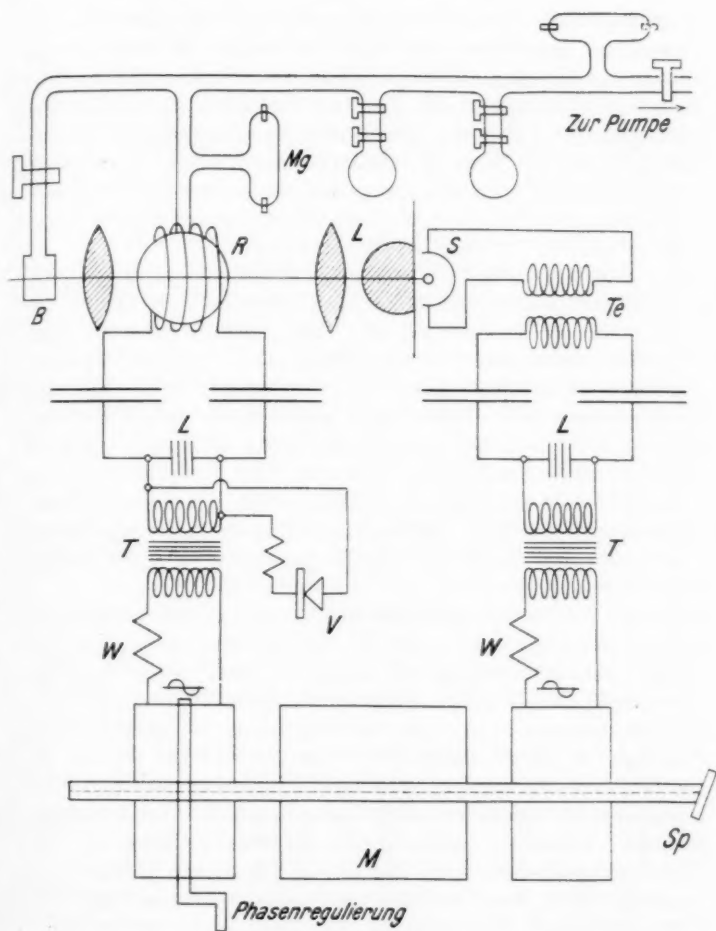
wodurch erst eine wohldefinierte Verspätung des Senders gegenüber der Absorptionsröhre ermöglicht wird. Das kann mit Hilfe von Ventilen erreicht werden, die aber aus Intensitätsgründen für die Zwecke der vorliegenden Messung ausscheiden.

Es war aber sehr naheliegend zu untersuchen, ob man nicht einfach durch Verwendung von Löschfunkenstrecken sehr kurz dauernde und auch stabile Entladungen erzielen kann. Die Erwartung hat sich im vollem Maße bestätigt. Es ist nur nötig, die Energiezufuhr durch Ändern von Selbstinduktion und Widerstand im Primärkreis des auf die Löschfunkenstrecke arbeitenden Transformators genau einzuregulieren. Man erhielt jedoch nur dann stabile Durchschläge, wenn die Erregung der den Transformator speisenden Wechselstrommaschine passend einreguliert war. Allerdings machten sich dann Schwankungen der Tourenzahl störend bemerkbar.

Die Tourenzahl konnte bei den Versuchen nur in engen Grenzen variiert werden. Die bei einer gewissen Tourenzahl maximal erreichbare Verspätung entspricht einer Phasenverschiebung von 180° , noch größere Verspätungen des Senders gegenüber der Röhre können bei konstanter Tourenzahl nur durch den Ausfall gewisser Durchschläge, etwa jedes zweiten, erzielt werden. Auch das gelingt bei passender Energiezufuhr, jedoch nur dann, wenn die Anzahl der Serienfunkenstrecken nicht zu groß war. Man konnte jedoch durch Parallelschalten eines Ventils zur Sekundärspule des Transformators die eine Phase etwas abschwächen und so wieder stabile Durchschläge erhalten.

Jedem Durchschlag der Löschfunkenstrecke entspricht eine gedämpfte Schwingung, die aber so schnell abklingt, daß die Zeitdauer des Durchschlags gegenüber der Halbperiode des benützten 500-periodischen Wechselstromes nicht in Betracht kommt. Der Aufbau der ganzen Anordnung ergibt sich aus der schematischen Fig. 10.

Zur Herstellung des 500-periodischen Wechselstromes dienten zwei Wechselstrommaschinen von etwa 300 Watt Wechselleistung, die beiderseitig mit einem Gleichstrommotor *M* von 1,5 kW-Leistung gekuppelt waren. Die Änderung der Phasenverschiebung geschah durch Drehen des Stators der einen Maschine, der in zwei großen kreisförmigen Ausschnitten



Anordnung zur Messung der Lebensdauer

Fig. 10

zweier Eisenplatten drehbar gelagert ist. Die Anregung von Ringstrom und Sender war analog: Die beiden Wechselströme speisten über geeignete Vorschaltwiderstände W die Trans-

formatoren T , deren Sekundärspulen an die Löschfunkenstrecke L angeschlossen waren. Der eine an die erste Löschfunkenstrecke angeschlossene Schwingungskreis betrieb über einen Teslatransformator T_e den Oszillator S , die Selbstinduktion des zweiten Schwingungskreises umgab den Ringstromkolben R . Über die Sekundärspule des den Ringstromkreis speisenden Transformators konnte über einen Vorschaltwiderstand ein Ventil V geschaltet werden, um die Durchschläge bei Ausfall der einen Phase zu stabilisieren.

Wegen starker Überlastung der Maschinen durfte die Aufnahme der Daten einer Lebensdaueremessung nicht länger als 2 Minuten in Anspruch nehmen. Da innerhalb dieser Zeit der Oszillator dank der vorzüglichen Konstanz der Schwingungsleistung einigermaßen konstant arbeitete, konnte die Messung statisch ausgeführt werden. Das direkt hinter dem Ringstromkolben befindliche Bolometer B war an die zur Pumpe führende Glasleitung angeschlossen, in welche die verschiedenen von den Gasaufbewahrungskolben kommenden Glasleitungen einmündeten. Das Bolometer wurde auf Hochvakuum ausgepumpt, wodurch eine mehr als 15mal gesteigerte Empfindlichkeit erzielt wurde.

Die Induktionswirkungen der den Ringstrom anregenden Selbstinduktionsspule waren so kräftig, daß anfänglich die feinen Bolometersysteme oft zerstört wurden. Diese zunächst außerordentlich kräftigen Störungen, die jede Messung vereitelt hätten, konnten aber durch Parallelschalten von Blockkondensatoren zu jedem Zweig der Wheatstoneschen Brücke so weit gemildert werden, daß die Meßgenauigkeit dank der Konstanz der Störungen nicht mehr wesentlich beeinträchtigt wurde. Außerdem erwies es sich als äußerst vorteilhaft, die die Galvanometerleitung enthaltende metallene Rohrleitung zwischen den das Bolometer bzw. Galvanometer enthaltenden Blechkästen an einer Stelle zu unterbrechen und zwei Drosselspulen in die Galvanometerleitung einzubauen, die offenbar die Ausbildung von Schwingungen zwischen den beiden Blechkästen als Endkapazitäten verhinderten. Diese Maßnahme allein genügte schon, um die von dem Teslatransformator der Sendeanordnung ausgehenden Störungen fast vollständig zu beseitigen. Um während der Messung die Durchschläge der beiden Lös-

funklenstrecken kontrollieren zu können, wurde der Ringstromkolben bzw. ein einpolig an den Teslatransformator angehängtes Leuchtröhrchen gemeinsam auf einen Spalt abgebildet, dessen Spiegelbild in einem auf der Maschinenachse unter schwacher Neigung aufgesetzten rotierenden Spiegel¹⁾ beobachtet werden konnte. Durch Drehen des Stators konnten die Spaltbilder aufeinandergelegt, also Phasengleichheit hergestellt werden.

§ 5. Ergebnisse der Lebensdauermessungen

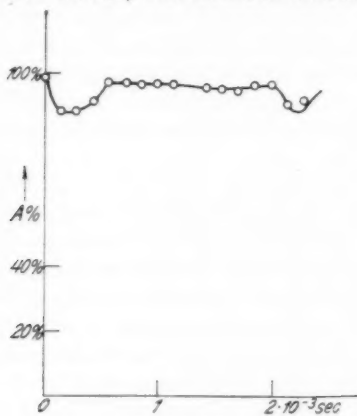
Obwohl wir auf die Deutung der Ergebnisse im § 3 des theoretischen Teiles dieser Arbeit ausführlich eingehen werden, sei doch schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die gemessene Absorption wahrscheinlich nicht ausschließlich auf wahre Absorption zurückzuführen ist, sondern daß sehr wohl eine erhebliche Zerstreuung der eingestrahnten Energie infolge von Totalreflexion stattfinden kann, wenn die Welle in den Ringstromkolben eindringt. Denn die Theorie liefert das Ergebnis, daß bei sehr kräftiger Ionisierung der Brechungs-exponent schon nahe an Null liegt. Totalreflexion tritt ein, wenn $\sin \varphi = n$ ist, wo φ den Einfallswinkel bedeutet.

Die Messungen wurden in der Weise ausgeführt, daß der zu jeder Statorstellung gehörige Bolometerausschlag abgelesen wurde. Die Abszissen der Kurven Fig. 11 bis Fig. 18 sind die zeitlichen Distanzen zwischen Ringstrom und Senderdurchschlag, die Ordinaten bedeuten die zugehörige prozentische Absorption.

Wir betrachten zuerst die beiden mit Argon erhaltenen Kurven Fig. 11 und Fig. 12, die unmittelbar nacheinander aufgenommen wurden. Die mit reinem Argon erhaltene Kurve Fig. 11 zeigt zwischen zwei zeitlich benachbarten Durchschlägen eine konstante Absorption von 97 Proz. an. Man kann wohl annehmen, daß in Wahrheit die Absorption vollkommen ist. Merkwürdigerweise sinkt aber die Absorption deutlich ab, wenn der Ringstrom einsetzt. Ist er abgeklungen, so beginnt ein relativ langsamer Anstieg, bis nach etwa $5 \cdot 10^{-4}$ Sek. die ursprüngliche Absorption von 97 Proz. wieder erreicht ist. Da sich von jetzt an die Absorption nicht merklich ändert bis

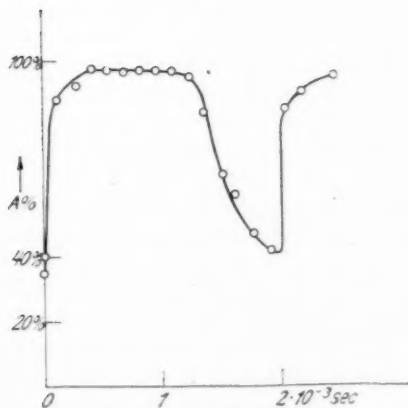
1) Vgl. K. W. Meissner u. W. Graffunder, Ann. d. Phys. 84. S. 1018. Fig. 6. 1927.

zum nächsten nach etwa $2 \cdot 10^{-3}$ Sek. erfolgenden Durchschlag, kann angenommen werden, daß die Lebensdauer der Absorption



Reines Argon

Fig. 11



Argon + Wasserstoff

Fig. 12

und damit die der freien Elektronen erheblich länger ist. Andererseits kann sie nicht wesentlich länger als $\frac{1}{10}$ Sek. sein; denn schaltet man bei *Phasengleichheit* die Ringstrom-

röhre aus, so erscheint sofort der ohne Anregung des Ringstromes beobachtete Galvanometeraus Schlag.

Kurve Fig. 12 wurde vor Kurve Fig. 11 aufgenommen; das Argon war noch nicht ganz rein, im Magnesiumreinigungsröhr war deutlich eine Blaufärbung zu erkennen, die von Wasserstoff herrührte. Spuren von Wasserstoff genügen also, um das Kurvenbild vollkommen zu verändern. Auch in Kurve Fig. 11 bleibt die Absorption zunächst auf 97 Proz., erst wenn die Dichte der freien Elektronen hinreichend abgeklungen ist, beginnt der Abstieg der Absorption.

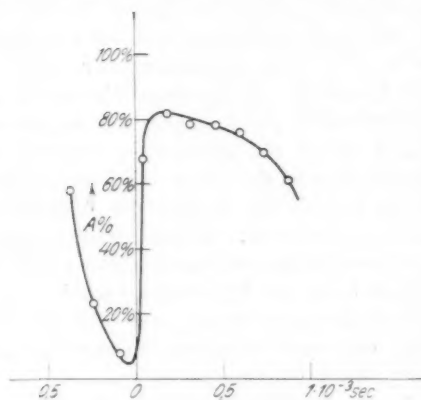
Es ist bemerkenswert, daß die Absorption durch den nun erfolgenden Durchschlag nicht sofort ihren vollen Betrag wieder annimmt; erst wenn der Durchschlag vorüber ist, nähert sich die Absorption ihrem Grenzwert von 97 Proz. Beide Kurven zeigen also, daß nach erfolgtem Durchschlag die Absorption noch einmal relativ langsam ansteigt.

Der Grund der Verschiedenheit der Kurven Fig. 11 und Fig. 12 ist die Elektronenaffinität der unedlen Gase, also hier die des Wasserstoffes: die freien Elektronen lagern sich an Atome an und kommen nun für den Absorptionsprozeß nicht mehr in Frage (vgl. Einleitung).

Figg. 13 und 14 zeigen den starken Einfluß von Verunreinigungen. Der bei der Kurve Fig. 11 nur angedeutete Abstieg der Absorption tritt sehr markant bei der Kurve Fig. 15 auf, die mit Argon unter stark verringertem Druck aufgenommen wurde. Bei dieser Aufnahme war im Kolben eine große, schwach leuchtende Kugel sichtbar umgeben von einem schmalen, intensiv blau leuchtenden Ring. Wie die Kurve zeigt, steigt die Absorption, wenn der Durchschlag vorüber ist, zunächst unmeßbar rasch an, um dann allmählich ihren ursprünglichen Wert wieder zu erreichen. Während der *rasche* Anstieg durch Elektronendiffusion erklärt werden kann (vgl. die Diskussion im theoretischen Teil), bleibt der daran anschließende *langsame* Anstieg, der dieselbe Zeit benötigt, wie der bei den Kurven Fig. 11 und Fig. 12, also jedenfalls dieselbe physikalische Ursache hat, zunächst noch ungeklärt.

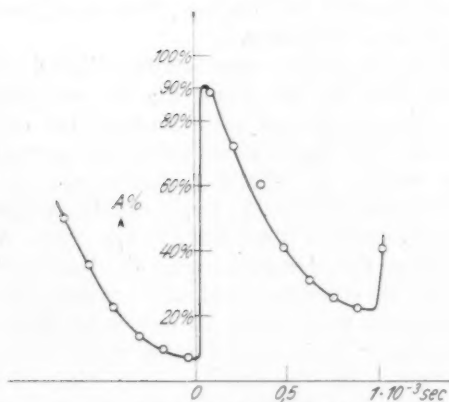
In den nun noch folgenden Kurven Figg. 16—18, die an unedlen Gasen aufgenommen sind, spiegelt sich deren verschieden große Elektronenaffinität wider. Die unedlen Gase

zeigen gerade das entgegengesetzte Verhalten: die Absorption ist im allgemeinen gleich Null, steigt aber beim Einsetzen



Argon (schwach verunreinigt)

Fig. 13



Argon (stark verunreinigt)

Fig. 14

der Entladung sehr stark an, um dann sehr rasch wieder abzuklingen. Es ist zu bemerken, daß der in den Kurven zum Ausdruck kommende mehr oder weniger steile Abfall zu

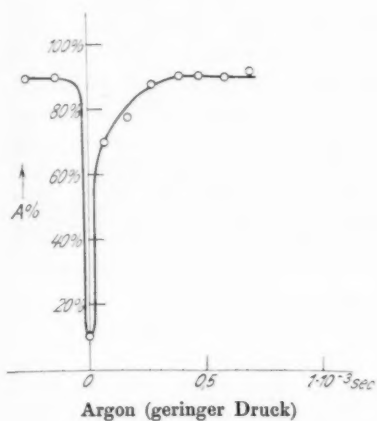


Fig. 15

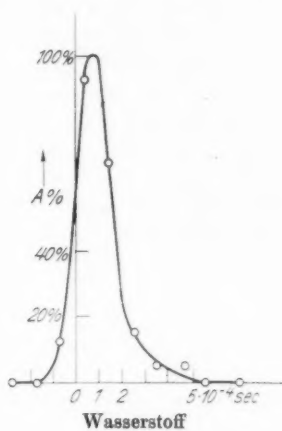


Fig. 16

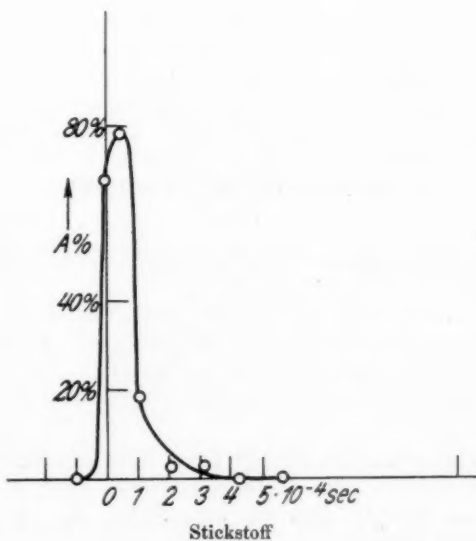
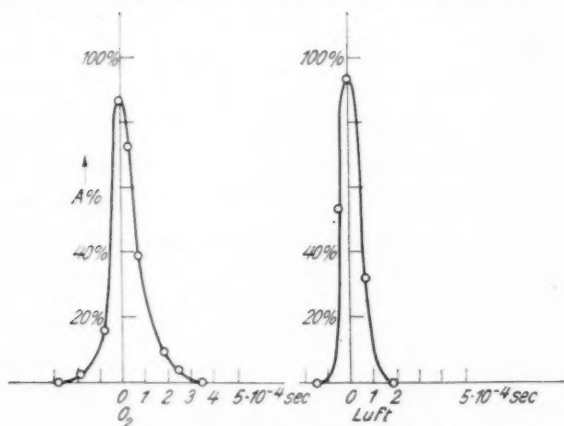


Fig. 17

korrigieren ist, da das Ansteigen der Absorption beim Einsetzen der Entladung nicht momentan erfolgt, wegen der immerhin endlichen Dauer der Durchschläge. Bei Sauerstoff und Luft ist also die Lebensdauer sehr kurz. Das entspricht ganz den bei den Versuchen von Franck und Hertz zum Ausdruck kommenden Eigenschaften des Sauerstoffes. Man ist dagegen überrascht, daß die Elektronen in Stickstoff fast dieselbe Lebensdauer haben, wie in Wasserstoff. Es ist aber zu berücksichtigen, daß stark angeregte und ionisierte Gase



Messungen an Sauerstoff und Luft

Fig. 18

ein wesentlich anderes Verhalten zeigen können als bei den Versuchen von Franck und Hertz.

Die Werte der Lebensdauer freier Elektronen für die untersuchten Gase sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Unter „Lebensdauer“ ist dabei die Zeit zwischen der Anregung und der vollständigen Abklingung der Absorption verstanden.

Von einer „Halbwertszeit“ kann nicht gesprochen werden, weil die Kurven keine Exponentialkurven sind, auch nicht, wenn man $\log J_0/J$, also im wesentlichen den Absorptionskoeffizienten, abträgt.

Für den beobachteten sehr steilen Abfall im ersten Teil

| Gas | Lebensdauer T in Sek. |
|--------------------------|---------------------------------|
| A | $2 \cdot 10^{-3} < T < 10^{-1}$ |
| H ₂ | etwa $3 \cdot 10^{-4}$ |
| N ₂ | " $3 \cdot 10^{-4}$ |
| O ₂ | " $1 \cdot 10^{-4}$ |
| Luft | " $1 \cdot 10^{-4}$ |

der Kurve, dessen Steilheit weit die aus dem unteren Teil unter Annahme einer Exponentialfunktion extrapolierte übertrifft, wird im theoretischen Teil der Arbeit eine Erklärung gegeben werden.

II. Theoretischer Teil¹⁾

§ 1. Allgemeine Betrachtungen über den Mechanismus der Absorption

Wie an späterer Stelle sich ergeben wird, nehmen die Elektronen, nachdem die Entladung im Ringstromgefäß vorüber ist, praktisch sofort im ganzen zur Verfügung stehenden Raume eine ungeordnete Bewegung an und stoßen dabei elastisch oder unelastisch mit den Gasatomen zusammen. Bei Edelgasen hat man im allgemeinen nur elastische Stöße in Betracht zu ziehen; unelastische Stöße kommen nur so lange in Frage, als die kinetische Energie der Elektronen noch zur Anregung der Gasatome ausreicht. Dagegen können sich die Elektronen leicht an *unedle* Gasatome beim Zusammenstoß anlagern und so ihren Impuls verlieren. Wir unterscheiden folgende beide Fälle der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Atomen:

- a) elastische Stöße,
- b) unelastische Stöße (Vernichtung der gesamten kinetischen Energie des stoßenden Elektrons).

Wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, kommt die Absorption der elektromagnetischen Strahlung dadurch zustande, daß durch die Zusammenstöße mit Gasatomen der im Feld der Welle beschleunigten Elektronen und Ionen Energie verbraucht wird. Die damit verbundene Absorption durch „Stoßdämpfung“ spielt in der H. A. Lorentzschen Dispersions-

1) Wie dem Verfasser nachträglich bekannt geworden ist, wurden ähnliche auf die drahtlose Telegraphie bezügliche Überlegungen von Hans Lassen ausgeführt. Ztschr. f. Hochfrequenztech. 28. S. 139. 1926.

theorie eine bedeutende Rolle. H. A. Lorentz hatte sich zur Erklärung der Absorption des *Lichtes* in Gasen folgende Vorstellung gebildet: Unter der Wirkung der einfallenden Welle werden die Dispersionselektronen zum Mitschwingen veranlaßt, natürlich um so mehr, je besser die eingestrahelte Frequenz mit der Eigenfrequenz übereinstimmt. Ein solcher Resonator soll aber nicht ungestört Energie aus dem Strahlungsfeld aufnehmen können; im Durchschnitt erlebt er in Zeitabständen τ einen Zusammenstoß mit einem Gasmolekül, wobei ihm die aufgenommene Energie entzogen wird. — Wir werden im folgenden eine rechnerische Durchführung des Absorptionsproblems für den Fall des *Elektronengases* geben.

Die Absorption wird natürlich stark von der Elektronenkonzentration abhängen.

Bei den Lebensdauermessungen an unedlen Gasen kommt die Elektronenkonzentration in Frage, die der beim Senderdurchschlag entstehende Wellenzug beim Passieren der Gaschicht gerade vorfindet, und während der dazu benötigten Zeit als konstant zu betrachten ist. Während im Fall b) das stoßende Elektron seinen im Feld der Welle erlangten Impuls an die Gasatome abgibt, also deren Temperatur erhöht, verliert im Fall a) das Elektron bei jedem Stoß nur einen sehr kleinen Bruchteil seiner Energie, so daß in diesem Fall zunächst lediglich eine Temperaturerhöhung des *Elektronengases* eintreten kann.

Wir wollen im folgenden die Annahme machen, daß der infolge der beschleunigenden Wirkung des Feldes hervorgerufene mittlere Teilchenstrom in der Feldrichtung zerstört wird, wenn die Elektronen mit Gasatomen zusammenstoßen. Während im Fall b) diese Annahme schon in der Voraussetzung enthalten ist, bedarf der Fall a) einer besonderen Diskussion.

Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß alle Elektronen die gleiche Geschwindigkeit haben. Wir betrachten ein kleines Zeitintervall, innerhalb dessen eine gewisse Gruppe von Elektronen, deren Bahnrichtungen bei genügend schwachem Feld ungeordnet sind, zum *elastischen* Stoß mit Gasatomen kommen. Aus dieser Gruppe greifen wir die Elektronen heraus, die annähernd die gleiche freie Weglänge seit ihrem letzten Zusammenstoß zurückgelegt haben und annähernd in der gleichen

Richtung G fliegen. (In der Fig. 19 in Richtung des Pfeiles.) Diese Elektronen wurden also innerhalb ihrer letzten freien Weglänge beschleunigt, dagegen die in der entgegengesetzten Richtung fliegenden Teilchen verzögert um den gleichen Betrag $\Delta v_0 \cos \vartheta$. v_0 bedeutet die ursprüngliche Geschwindigkeit ohne Feld, Δv_0 den im Feld erlangten Geschwindigkeitszuwachs und ϑ der Winkel zwischen Feldrichtung und Bewegungsrichtung des Elektrons. Infolge der Zusammenstöße werden

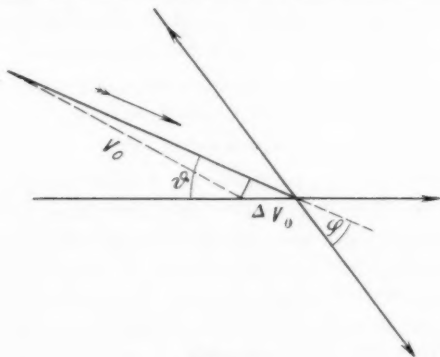


Fig. 19

die betrachteten Elektronen alle möglichen Ablenkungen erfahren, wir betrachten aber nur diejenigen, die um den Winkel φ bzw. $\pi - \varphi$ abgelenkt werden, welche nach dem Stoß die Geschwindigkeit $v_0 + \Delta v_0 \cos \vartheta$ besitzen. Ist die Wahrscheinlichkeit der Ablenkung um den Winkel φ ebenso groß wie die für den Ablenkungswinkel $\pi - \varphi$, so wird in der betrachteten Richtung der Strom zerstört. Dasselbe gilt natürlich für jede andere Ablenkungsrichtung und für jedes ursprünglich ins Auge gefaßte Elektronenbündel. Der gesamte mittlere Teilchenstrom unserer während des betrachteten Zeitintervalles zum Stoß kommenden Elektronengruppe wird also durch die Zusammenstöße zerstört. Die Voraussetzung, die wir dabei über die Ablenkungswahrscheinlichkeit machen mußten, ist erfüllt, wie man leicht sieht, wenn die Atome wie elastische Kugeln die Elektronen reflektieren.

Fassen wir je ein in Richtung des Pfeiles (Fig. 19) fliegendes Elektron mit einem in der entgegengesetzten Rich-

tung fliegenden Elektron zusammen, so ist die Energie eines solchen Paares sowohl vor als auch nach dem Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (v_0 + \Delta v_0 \cos \vartheta)^2 + \frac{1}{2} m (v_0 - \Delta v_0 \cos \vartheta)^2 \\ = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m (\Delta v_0 \cos \vartheta)^2. \end{aligned}$$

Im Mittel ist also die Energie eines Elektrons infolge der beschleunigenden Wirkung des Feldes gewachsen um den Betrag $\frac{1}{2} m (\overline{\Delta v})^2$, wo $(\overline{\Delta v})^2$ den Mittelwert aller Quadrate der im Feld erreichten absoluten Geschwindigkeitsänderungen bedeutet (Temperaturerhöhung des Elektronengases).

§ 2. Stromverlauf

a) Bei konstantem Feld

Wir denken uns zunächst ein konstantes Feld zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet und fragen nach der Anlaufsfunktion des mittleren Teilchenstromes. Die gesamte Stromdichte, die innerhalb des an den Beobachtungsmoment t anschließenden Zeitelementes dt zerstört wird, sei dj_z . Die mittlere Stoßzeit der Elektronen mit Gasatomen betrage τ Sekunden. Von den Stößen der Elektronen untereinander wollen wir absehen. Während des Zeitelementes dt ereignen sich in der Volumeneinheit $N \cdot \frac{1}{\tau} \cdot dt$ Zusammenstöße mit Gasatomen, wo N die Elektronendichte bedeutet. Die Elektronen, die innerhalb des Zeitintervalles dt nicht zum Stoß kommen, werden beschleunigt und liefern den Stromdichtezuwachs $N' \cdot \varepsilon \cdot a dt$, wo ε die Elementarladung bedeutet und a für $\frac{eE}{m}$ gesetzt ist. Bedenken wir, daß $N' = N - \frac{Ndt}{\tau}$, so kann auch für den Stromdichtezuwachs unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen zweiter Ordnung $N\varepsilon a dt$ gesetzt werden. Die gesamte Stromdichteänderung beträgt mithin:

$$(1) \quad dj = N\varepsilon a dt - dj_z.$$

Berechnung von dj_z . Die während dt zu Stoß kommenden Elektronen sind seit ihrem letzten Zusammenstoß verschieden lange Zeiten unterwegs, die wir mit T bezeichnen wollen. Während des Zeitintervalles dT , welches um die Zeit T zurück-

liegt, kommen $\frac{N d T}{\tau}$ Elektronen zum Stoß. Ein gewisser Bruchteil dieser Elektronen führt erst nach Ablauf der Zeit T im Zeitelement dt den nächsten Zusammenstoß mit Gasatomen aus. Dieser Bruchteil ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron die Zeit T ohne anzustoßen frei durchläuft, aber im anschließenden Zeitelement dt mit einem Atom zusammenstößt. Die kinetische Gastheorie liefert für diese Wahrscheinlichkeit W den Wert

$$W = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}} dt.$$

Für die Anzahl $(dn)_{dT}$ der herausgegriffenen Elektronen folgt also:

$$(2) \quad (dn)_{dT} = \frac{N d T}{\tau^2} e^{-\frac{T}{\tau}} dt.$$

Diese Gruppe von Elektronen repräsentiert am Anfang von dt eine Stromdichte in der Beschleunigungsrichtung von der Größe $(dn)_{dT} \cdot e \cdot a \cdot T$. Nach unseren Voraussetzungen wird dieser Strom innerhalb des Zeitintervalles dt zerstört.

Bedenken wir, daß auch noch Elektronen vorhanden sind, die ihren letzten Zusammenstoß vor dem Anlegen des Feldes ausgeführt haben, also vor der Zeit $t = 0$, so ergibt sich für die gesamte zerstörte Stromdichte

$$dj_z = \int_{T=0}^{T=t} e a T (dn)_T + e a t \int_{T=t}^{T=\infty} (dn)_{dT}.$$

Das zweite Integral umfaßt die Elektronen, deren Stoß länger als die Zeit t zurückliegt.

Mit Hilfe von (2) folgt also:

$$\begin{aligned} dj_z &= \frac{N e a dt}{\tau^2} \left\{ \int_0^t e^{-\frac{T}{\tau}} T dT + t \int_t^\infty e^{-\frac{T}{\tau}} dT \right\} \\ &= \frac{N e a dt}{\tau^2} \left\{ -\tau t e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + t \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \end{aligned}$$

also

$$dj_z = N e a dt \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

oder nach (1)

$$dj = N \varepsilon a dt - N \varepsilon a dt \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

oder durch Integration:

$$(3) \quad j_t = \int_0^t N \varepsilon a e^{-\frac{t}{\tau}} dt = N \varepsilon a \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Damit ist aber die gesuchte Funktion gefunden. Für $t = \infty$ ergibt sich die schon lange bekannte Formel $j_\infty = N \varepsilon a \tau$, die in der Elektronentheorie der Metalle eine Rolle spielt.¹⁾

b) *Stromverlauf bei periodischem Feld*

Es sei bemerkt, daß die abgeleitete Funktion derjenigen bei Selbstinduktion in einem Stromkreis analog gebaut ist. Man ist deshalb geneigt, mit Hilfe einer Analogiebetrachtung daraus sofort die für *periodische* Felder geltende Formel abzuleiten. Die Gleichung für den Anstieg des Stromes bei Selbstinduktion lautet:

$$j = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right).$$

Ist die Spannung E periodisch, so hat man:

$$j = \frac{E}{R} \frac{1 - i \omega \frac{L}{R}}{1 + \frac{L^2}{R^2} \omega^2}.$$

Setzt man also $\frac{L}{R} = \tau$, so erhält man:

$$j = N \varepsilon a_0 e^{i \omega t} \tau \cdot \frac{1 - i \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \text{wo } i = \sqrt{-1}.$$

Da aber diese Überlegung nicht einer strengen Kritik standhält, leiten wir die für periodische Felder geltende Gleichung direkt ab, indem wir die erste Überlegung (§ 2a) dementsprechend erweitern. Wir führen die ganz analoge Betrachtung ohne viel Erläuterung aus:

1) P. Drude gab folgende Formel an: $j_\infty = \frac{1}{2} N \varepsilon a \tau$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ tritt auf, wenn man die *Verteilung* der freien Weglängen unberücksichtigt läßt.

An Stelle der Stromdichteänderung $(dn)_{dT} \cdot \varepsilon \cdot a T$ hat man jetzt, da $a = a_0 e^{i\omega t}$

$$(dj)_{dT} = (dn)_{dT} \varepsilon a_0 \int_0^T e^{i\omega(t-T)} dT = \frac{(dn)_{dT} \varepsilon a_0 e^{i\omega t}}{i\omega} (1 - e^{-i\omega T}).$$

Für die gesamte zerstörte Stromdichte folgt mithin:

$$dj_z = \int_{T=0}^{T=t} (dj)_{dT} + \frac{\varepsilon a_0 N dt}{r^2} \int_0^t e^{i\omega T} dT \cdot \int_t^\infty e^{-\frac{T}{\tau}} dT$$

oder

$$dj_z = \frac{\varepsilon a_0 N dt}{i\omega r^2} \left\{ e^{i\omega t} \left(\int_0^t e^{-\frac{T}{\tau}} dT - \int_0^t e^{-i\omega T - \frac{T}{\tau}} dT \right) + (e^{i\omega t} - 1) \int_t^\infty e^{-\frac{T}{\tau}} dT \right\}.$$

Die Auswertung der Integrale liefert:

$$dj_z = \frac{\varepsilon a_0 N dt}{i\omega r^2} \left\{ e^{i\omega t} \left[\tau + \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau}} \left(e^{-(i\omega + \frac{1}{\tau})t} - 1 \right) \right] - \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right\}$$

oder

$$dj_z = \frac{\varepsilon a_0 N dt}{i\omega r} \left\{ e^{i\omega t} \left(1 - \frac{1}{i\omega \tau + 1} \right) - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - \frac{1}{i\omega \tau + 1} \right) \right\},$$

mithin

$$dj_z = \frac{N \varepsilon a_0 dt}{1 + i\omega \tau} \left(e^{i\omega t} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Das zweite Glied bedeutet einen Anlaufvorgang, der nach hinreichend langer Zeit keine Rolle mehr spielt; wir erhalten dann:

$$dj = N \varepsilon a_0 e^{i\omega t} dt - \frac{N \varepsilon a_0}{1 + i\omega \tau} e^{i\omega t} dt$$

also

$$dj = N \varepsilon a_0 e^{i\omega t} \left(1 - \frac{1 - i\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) dt$$

oder

$$j = N \varepsilon a_0 \tau \frac{1 - i\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} e^{i\omega t} = \frac{N \varepsilon^2 \tau}{m} \frac{1 - i\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \mathcal{E}.$$

Das ist in der Tat die aus Analogie mit der Selbstinduktion gewonnene Gleichung.

Wir gehen damit in die Maxwell'schen Gleichungen ein:
Es ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi \frac{j}{c}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t},$$

wo also für j zu setzen ist:

$$j = -i \frac{N e^2 \tau}{m \omega} \frac{1 - i \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

so daß folgt:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \left(1 - 4\pi \frac{N e^2 \tau}{m \omega} \frac{\omega \tau + i}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) = \frac{p^2}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Aus beiden Maxwell'schen Gleichungen folgt also die Wellengleichung

$$\frac{p^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{E}.$$

Nach bekannten Prinzipien der Optik hat man also für ebene Wellen, die sich in der Richtung s ausbreiten:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{s}{c} p\right)} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega \left(t - \frac{s}{c} n\right)} e^{-\frac{\omega}{c} s \kappa},$$

wenn wir $p = n - i\kappa$ setzen.

Der Realteil von p bedeutet also den Brechungsexponenten, der Imaginärteil mit ω/c multipliziert den Absorptionskoeffizienten μ . Es folgt also:

$$(4) \quad \begin{cases} n^2 - \kappa^2 = 1 - 4\pi \frac{N e^2}{m \omega^2} \frac{\tau^2 \omega^2}{1 + \tau^2 \omega^2} \\ 2n\kappa = 4\pi \frac{N e^2}{m \omega^2} \frac{\tau \omega}{1 + \tau^2 \omega^2}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann also N und τ berechnet werden, wenn κ und n experimentell bekannt sind. Unsere beiden Gleichungen liefern für sehr große Werte von τ die bekannte, für freie Elektronen gültige Formel

$$(4') \quad 1 - n_0^2 = 4\pi \frac{N e^2}{m \omega^2}; \quad \kappa = 0 \text{ falls } 4\pi \frac{N e^2}{m \omega^2} \ll 1.$$

Während man diese Formel also der Brechung der Wellen in der Heavisideschicht zugrunde zu legen hat, gelten hier

die beiden allgemeineren Formeln (4). Aus (4') folgt ein Brechungsexponent kleiner als 1, also Totalreflexion für einen gewissen Einfallswinkel ($\sin \varphi = n$).

Steigt N weiter, so wird $n_0 = 0$, die Welle wird immer total reflektiert. Weitere Steigerung von N ändert daran nichts, $|n_0|$ würde dann, weil n_0 imaginär wird, den Absorptionsindex bedeuten, falls die Welle in das Medium eindringen könnte.

§ 3. Diskussion der Gleichungen (4)

Eliminiert man n aus den Gleichungen (4) und setzt $4\pi \frac{N e^2}{m \omega^2} = \delta$, so folgt:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2(1 + \omega^2 \tau^2)} \left\{ \sqrt{(1 + \omega^2 \tau^2(1 - \delta))^2 + \tau^2 \omega^2 \delta^2} \right. \\ &\quad \left. - (1 + \omega^2 \tau^2(1 - \delta)) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir unterscheiden a) $\delta < 1$

b) $\delta > 1$.

Im Fall a) als auch b) hat man für sehr kleine $\tau \omega$:

$$x^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + 2\omega^2 \tau^2(1 - \delta) + \tau^2 \omega^2 \delta^2} - 1 - \omega^2 \tau^2(1 - \delta) \right\}$$

oder

$$x^2 = \frac{1}{4} \{ 2 + 2\omega^2 \tau^2(1 - \delta) + \tau^2 \omega^2 \delta^2 - 2 - 2\omega^2 \tau^2(1 - \delta) \}$$

$$x = \frac{1}{2} \tau \omega \delta \quad \text{und} \quad n \rightarrow 1.$$

Für große τ hat man im Fall a)

$$x^2 = \frac{1}{\omega^2 \tau^2} \left\{ \omega^2 \tau^2(1 - \delta) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau^2 \omega^2 \delta^2}{\omega^4 \tau^4(1 - \delta)} \right) - \omega^2 \tau^2(1 - \delta) \right\},$$

also

$$x^2 = \frac{1}{4\omega^2 \tau^2} \frac{\delta^2}{1 - \delta}; \quad n \rightarrow \sqrt{1 - \delta} = n_0.$$

Bei sehr kleinen Elektronenkonzentrationen ist also x immer der Zahl N proportional; für große τ im Fall b) hat man dagegen:

$$x^2 = \frac{1}{2\omega^2 \tau^2} \left\{ \omega^2 \tau^2(\delta - 1) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tau^2 \omega^2 \delta^2}{\omega^4 \tau^4(1 - \delta)} + \omega^2 \tau^2(\delta - 1) \right) \right\},$$

also

$$x^2 = (\delta - 1) + \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^2 \tau^2} \frac{\delta^2}{1 - \delta} \rightarrow \delta - 1, \quad \text{wo } \delta - 1 = |n_0|^2.$$

Das Ergebnis $x \rightarrow |n_0|$ entspricht der oben gemachten Bemerkung, daß n_0 für $\delta > 1$ als imaginäre Größe einen Absorptionskoeffizienten bedeutet. x bleibt also von einem gewissen Wert für τ an konstant. Indessen wird n bald so klein, daß im allgemeinen die Welle gar nicht mehr in das Medium eindringen kann. Ist $\delta < 4$, dann ist n immer kleiner als 1, durchläuft dagegen ein Maximum und wird in einem gewissen Bereich größer als 1, wenn $\delta > 4$. Zum Beweise setzen wir in (4) $n = 1$ und eliminieren x . Dann folgt für den Schnittpunkt der n -Kurve mit der Geraden $n = 1$

$$\omega \tau = \sqrt{\frac{\delta}{4} - 1}.$$

Es muß bemerkt werden, daß die Rechnungsergebnisse für sehr große τ nicht mehr richtig sind, wegen der (experimentell immer erfüllten) Voraussetzung, daß die Stoßzahl der Elektronen untereinander verschwindend klein sei gegenüber der Stoßzahl mit Gasatomen.

Zusammenstellung der Grenzfälle

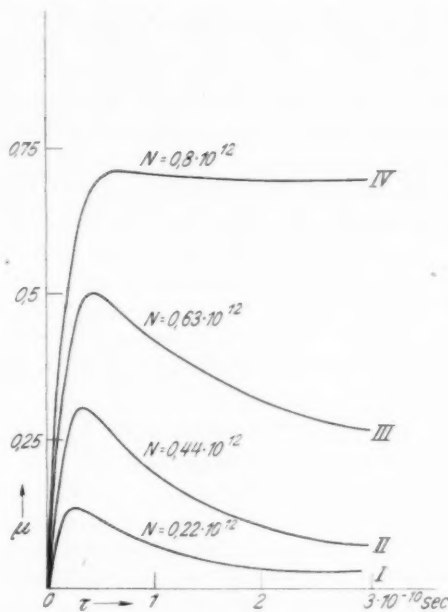
a) $\delta < 1$

$$\begin{aligned} \tau \rightarrow 0, \quad x &= \frac{1}{2} \omega \tau \delta, & n &\rightarrow 1 \\ \tau \rightarrow \infty, \quad x &= \frac{1}{2 \omega \tau} \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta}}, & n &\rightarrow \sqrt{1 - \delta} = n_0. \end{aligned}$$

b) $\delta > 1$

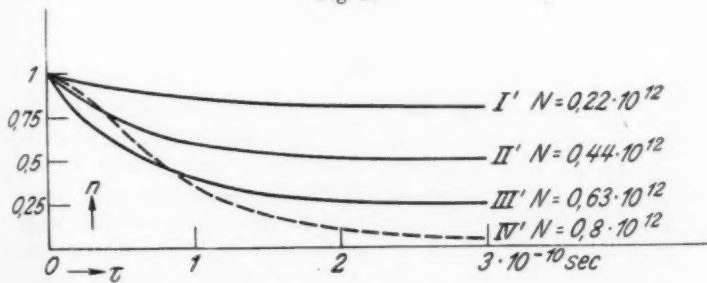
$$\begin{aligned} \tau \rightarrow 0, \quad x &= \frac{1}{2} \omega \tau \delta, & n &\rightarrow 1, \\ \tau \rightarrow \infty, \quad x^2 &= \delta - 1 + \frac{1}{4 \omega^2 \tau^2} \frac{\delta^2}{1 - \delta}, & n &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Interessante Aufschlüsse gibt eine numerische Auswertung der Gleichung (5), deren graphische Darstellung in Figg. 20 bis 22 gegeben ist. Parameter der Kurven ist die Elektronendichte N . Die Kurven lehren: sinkt N unter die „kritische Dichte“ ($\delta = 1$) $N = 0,63 \cdot 10^{12}$, so stürzt der Absorptionskoeffizient auf einen geringfügigen Bruchteil seines anfänglichen Wertes ab. Gleichzeitig springt der Brechungsexponent fast momentan von einem Werte nahe bei Null auf einen Wert wenig unterhalb 1 gelegen. Der Abfall des Absorptions-



$\mu = f(\tau)$ für $\lambda = 4,5$ cm (theoretisch)

Fig. 20



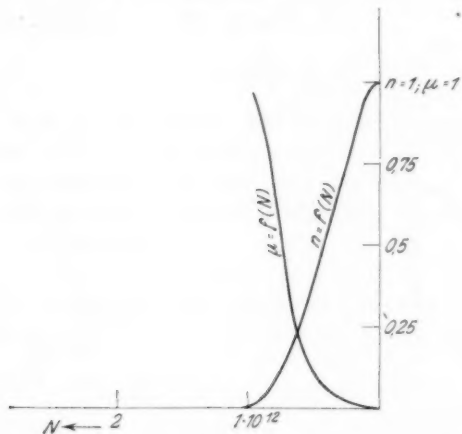
$n = f(\tau)$ für $\lambda = 4,5$ cm (theoretisch)

Fig. 21

koeffizienten und der Anstieg des Brechungsexponenten wird bei den vorliegenden Versuchen noch viel plötzlicher sein als bei den Kurven Fig. 21 bis Fig. 22 an der Stelle $\tau = 3 \cdot 10^{-10}$ Sek.,

da die für die Ringstrommessungen gültigen Werte von τ wohl alle höher als $3 \cdot 10^{-10}$ Sek. liegen. Genaue Druckmessungen wurden nicht vorgenommen. Für die Kenntnis des genauen Wertes von τ ist außer der freien Weglänge der Elektronen noch die Kenntnis der mittleren Geschwindigkeit erforderlich.

Schon in § 5 des experimentellen Teiles dieser Arbeit wurde darauf hingewiesen, daß die gemessene Absorption zum



$n = f(N); \mu = f(N)$ für $\lambda = 4,5$ cm (theoretisch)

Fig. 22

Teil auf Zerstreuung, zum anderen Teil auf wahrer Absorption beruht. Denn es ist klar, daß bei einem sehr kleinen Brechungs-exponenten eine erhebliche Zerstreuung der in den Kolben eintretenden Welle infolge von Totalreflexion eintreten muß. Eine geringfügige Unterschreitung der kritischen Dichte genügt aber, wie wir sahen, um *beide* Ursachen der „gemessenen Absorption“ zu beseitigen; der Kolben wird fast momentan durchsichtig. Die noch zurückgebliebene Absorption, die also als wahre Absorption anzusprechen ist, sinkt nun nach Tab. 2a *proportional* mit der Elektronendichte weiter ab. Der Kurvenverlauf nähert sich dem einer Exponentialfunktion, wenn die Teilchendichte exponentiell abklingt. Der beginnenden asym-

ptotischen Annäherung der experimentellen Kurve an die X -Achse entsprächen dann N -Werte um $5 \cdot 10^{11}$, während die Anfangsdichte mehr oder weniger darüberliegt.

Es sei bemerkt, daß der Verlauf der Kurve Fig. 12 an Argon ebenfalls für die eben entwickelte Deutung spricht. Der konstante Verlauf der zunächst sehr kräftigen Absorption zeigt, daß der wahre Absorptionskoeffizient zu groß, der Brechungsexponent zu klein ist, um einen merklichen Energiebetrag hindurchzulassen. Der relativ plötzlich einsetzende Abfall tritt ein, wenn die kritische Dichte erreicht ist, so daß der Biegung der Kurve N -Werte um $5 \cdot 10^{11}$ zuzuschreiben wären. Ein weniger plötzlich einsetzender Absturz der Absorption ließe sich dagegen in einfacherer Weise verstehen.

§ 4. Deutung der Kurve Fig. 15

Bevor wir die Diskussion der Ringstrommessungen abschließen, sei noch einmal auf das experimentelle Ergebnis der Kurve Fig. 15 eingegangen. Die Erklärung des plötzlichen Absturzes der Absorption beim Einsetzen der Entladung ist folgende: Die Elektronen werden, wie eine einfache Überlegung zeigt, durch das magnetische Wechselfeld aus der Mitte des Entladungsgefäßes nach außen geworfen, so daß die Strahlung wieder ungehindert den Kolben passieren kann, und diffundieren, nachdem die gedämpfte Schwingung im Hochfrequenzkreis abgeklungen ist, wieder nach der Mitte. Dabei ist es nach dem Ergebnis der oben angestellten Betrachtungen über die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Zahl N zur fast vollkommenen Vernichtung der Absorption durchaus nicht notwendig, daß *alle* Elektronen aus der Mitte entfernt werden; vielmehr genügt schon eine Unterschreitung der noch sehr erheblichen Grenzdichte. Für diese Erklärung spricht vor allem auch das äußere Bild der Entladung, die sich im Falle der Kurve Fig. 1 wesentlich an der Kolbenperipherie abspielte.

Man kann abschätzen, wieviel Zeit der Prozeß der Rückdiffusion in Anspruch nehmen wird. Nehmen wir an, daß sich keine Elektronen an Atome anlagern, so lautet die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{1}{k} \frac{\partial \varrho}{\partial t},$$

wenn wir der Einfachheit halber Zylindersymmetrie voraussetzen. q bedeutet die Elektronenzahl im Kubikzentimeter, k den Diffusionskoeffizienten. Für k ergibt sich¹⁾

$$k = \frac{1}{3} \lambda \bar{c},$$

wo λ die mittlere freie Weglänge der Elektronen und \bar{c} deren mittlere Geschwindigkeit bedeutet. Die Separation der Diffusionsgleichung führt in bekannter Weise auf die Lösung

$$q = \sum_{\nu} A_{\nu} J_0(\alpha_{\nu} r) e^{-\alpha_{\nu}^2 k t} + \text{const},$$

wo J_0 die Besselsche Funktion nullter Ordnung bedeutet. Die an der Stelle $r = R$ befindliche feste Wand fordert als Randbedingung, daß hier die *Strömung* verschwinde; also

$$\left(\frac{\partial q}{\partial r} \right)_{r=R} = 0.$$

Die Differentiation unter Berücksichtigung dieser Randbedingung ergibt, wo J_1 die Besselsche Funktion erster Ordnung bedeutet:

$$0 = \sum_{\nu} A_{\nu} J_1(\alpha_{\nu} R) e^{-\alpha_{\nu}^2 k t} \quad (\text{identisch in } t).$$

Daraus folgt aber, daß $\alpha_{\nu} R$ die Nullstellen von J_1 sein müssen; bezeichnen wir diese mit β_{ν} , so folgt:

$$\alpha_{\nu} = \frac{\beta_{\nu}}{R}.$$

Damit sind die α_{ν} bestimmt; die A_{ν} sind so zu wählen, daß q zur Zeit $t = 0$ eine passende Funktion von r wird (im Gebiet $0 < r < R$). Zur Abschätzung wird es genügen, sich auf die erste Nullstelle β_1 zu beschränken, weil die anderen Exponentialfunktionen viel rascher abklingen und sich schon mit dem Ansatz (A_1 negativ)

$$q = A_1 J_0(\alpha_1 r) e^{-\alpha_1^2 k t} + \text{const}$$

eine passende Anfangsbedingung $q = f(r)$ (deren wahrer Verlauf leider unbekannt ist), erfüllen läßt. Man erhält dann für die Halbwertszeit H der Rückdiffusion

$$H < 10^{-6} \text{ Sek.}$$

Diese kurze Zeit bewirkt den unmeßbar raschen Anstieg der Absorption nach Abklingung der Hochfrequenz.

§ 5. Folgerungen aus den mit dem Entladungsrohr in I, § 3 erhaltenen Meßergebnissen

Die Meßergebnisse der mit der Entladungsröhre Fig. 7 angestellten Versuche haben aus verschiedenen experimentellen Gründen nur mehr qualitativen Wert. Der aus der Messung

1) L. Boltzmann, Gastheorie 1. S. 89.

erschlossene Wert des Extinktionskoeffizienten x ist wegen der Inhomogenität der Gasschicht unsicher, dürfte aber etwa gleich eins sein. Mißt man außerdem die Leitfähigkeit in der Bogenentladung aus Strom und Spannung, so bekommt man mittels der Beziehung

$$j = \frac{N e^2}{m} \tau \mathcal{E} \quad (\mathcal{E}: \text{Feldstärke im Entladungsrohr})$$

[vgl. Formel (3)]

den Ausdruck

$$\frac{N e^2}{m} \tau.$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß die Leitfähigkeit wesentlich Elektronenleitfähigkeit ist. Kennt man also außerdem den Extinktionskoeffizienten x , so kann man ohne Kenntnis des Brechungsexponenten N und τ einzeln berechnen mit Hilfe der Formeln (4). Man erhält so

$$\tau = 0,8 \cdot 10^{-10} \text{ sec.}$$

$$N = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}.$$

Zum Vergleich sei bemerkt, daß Langmuir¹⁾ in einer Hg-Bogenentladung bei wenig größerer Stromdichte nach der Sondenmethode den Wert fand

$$N = 1,7 \cdot 10^{12}.$$

Wir werden also annehmen dürfen, daß im großen und ganzen die Theorie die wirklichen Verhältnisse richtig wiedergibt.

Zusammenfassung

1. Es wird ein neuer empfindlicher Empfänger für Hertzsche Wellen beliebiger Wellenlänge beschrieben, der auf dem Bolometerprinzip beruht.

2. Es wird die Absorption und Reflexion Hertzscher Wellen von etwa 4 cm Wellenlänge beim Durchgang durch intensiv ionisierte Gase (Ne, A, N, H, O, Luft) untersucht.

1) I. Langmuir u. H. Mott-Smith, vgl. Handbuch der Physik H. Geiger u. K. Scheel 14. S. 296.

3. Es wird die Lebensdauer der bei der Gasentladung auftretenden freien Elektronen mit Hilfe des Absorptionseffektes (vgl. 2) gemessen.

4. Die Beobachtungsergebnisse werden theoretisch gedeutet.

Vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1926—1928 im Physikalischen Institut der Universität ausgeführt.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Ratschläge bin ich Hrn. Prof. Dr. K. W. Meissner zu großem Dank verpflichtet, ebenso Hrn. Geheimrat Prof. Dr. R. Wachsmuth für rege Anteilnahme und bereitwilligste Überlassung der Institutsmittel.

Frankfurt a. M., Physik. Institut d. Univers., März 1929.

(Eingegangen 29. März 1929)

*Eine Bemerkung zu Eddingtons neuer Theorie
des elektrischen Elementarquantums*

Von Wilhelm Anderson

Vor kurzem hat A. S. Eddington eine neue Theorie des elektrischen Elementarquantums aufgestellt. Dabei weist er darauf hin, daß man noch vor einigen Jahren hoffen konnte, den Wert von e als singulare Lösung einer Differentialgleichung zu finden. „It was always difficult to see how such a theory could lead to the same charge in the very different conditions corresponding to an electron and proton. This kind of solution has been ruled out by the modern theory which has virtually abolished all structure of an electron.“¹⁾ Eddington behauptet also, daß es vom Standpunkt der alten Theorie (welche dem isolierten Elektron eine bestimmte „Struktur“ zuschreibt) schwer verständlich sei, weshalb das Elektron und das Proton, trotz der großen Verschiedenheit ihrer Massen, gleiche Ladungen besitzen. Mit einer solchen Behauptung bin ich aber nicht einverstanden.

Vor einiger Zeit habe ich eine Untersuchung über das elektrische Elementarquantum in den „Annalen der Physik“ veröffentlicht. Ich kam dabei zu dem Schluß, daß ein elektrisches Elementarteilchen nur dann in noch kleinere Teilchen zerfallen könne, wenn seine Ladung (abgesehen von dem Vorzeichen) größer sei als eine bestimmte universelle Minimalladung, die ich durch e_{\min} bezeichnete; „... dabei ist es überraschenderweise vollständig gleichgültig, ob die Masse unseres Teilchens groß oder klein ist: ausschließlich auf die Ladung kommt es hier an. Leider läßt sich e_{\min} nicht mit vollständiger Genauigkeit ermitteln.“²⁾ Ich konnte nur feststellen, daß e_{\min}

1) A. S. Eddington, Proc. Roy. Soc. A. 122. S. 365. 1929.

2) W. Anderson, Ann. d. Phys. [4] 87. S. 542. 1928.

wohl sicherlich größer als $1,14 \cdot 10^{-11}$ elektrostatische Einheit ist, wahrscheinlich auch größer als $1,14 \cdot 10^{-10}$, vielleicht größer als $1,14 \cdot 10^{-9}$. Die Stabilität der Elektronen und Protonen suchte ich dadurch zu erklären, daß ihre Ladung kleiner (oder gleich) e_{\min} ist. Da aber e_{\min} von der Masse unabhängig ist, so liegt auch nichts Wunderbares darin, daß die Ladungen des Elektrons und des Protons gleich groß sind. Dabei ist zu beachten, daß *meine Untersuchung gerade auf der alten Vorstellung vom Elementarteilchen gegründet ist*: ich betrachtete nämlich das Elementarteilchen als eine Kugel mit gleichmäßig verteilter Raumladung.

(Eingegangen 2. April 1929)

**Über die kalorimetrische Absolutmessung
des elektrolytischen Leitvermögens
für hochfrequenten Wechselstrom**

Von E. Justi

(Mit 8 Figuren)

Problemstellung

Nach der klassischen Maxwellschen Theorie müssen alle Leiter der Elektrizität undurchsichtig sein, weil die eindringende elektromagnetische Energie des Lichtes in Joulesche Wärme umgesetzt wird. Damit steht im Widerspruch, daß viele Elektrolyte, die Gleichstrom und langsamen Wechselstrom gut leiten, lichtdurchlässig sind. Dieser Umstand erklärt sich, wie E. Cohn(1) zuerst bemerkte, ganz ungezwungen nach dem Faradayschen Gesetz, wonach die Elektrizitätsleitung in Elektrolyten mit der Bewegung der trägen Masse der Ionen verknüpft ist, die groß gegen die Ladung ist und daher sehr schnellen Schwingungen nicht mehr folgen kann.

Ist nun für das Auge beispielsweise Seewasser gleich durchsichtig wie das um mehrere Größenordnungen schlechter leitende Süßwasser, so muß man annehmen, daß irgendwo in dem Frequenzbereich zwischen den Schwingungen, die man bei Messungen nach der Kohlrauschmethode benutzt, und den Schwingungen des sichtbaren Lichtes die Leitfähigkeit der Elektrolyte um einige Größenordnungen sinkt.

Wenn auch E. Cohn diese Änderung der Leitfähigkeit aus theoretischen Gründen, die unseren heutigen Vorstellungen nicht mehr entsprechen, erst bei höheren Frequenzen erwartete, so sprechen doch anscheinend verschiedene Umstände dafür, daß dieser Vorgang sich schon im Schwingungsbereich der drahtlosen Telegraphie abspielt. Diese Vermutung sprach zuerst Heinrich Hertz(2) aus, später F. Kiebitz(3) und in letzter Zeit F. Ollendorff(4). Besonders legen die Versuche

von J. H. Rogers und dem amerikanischen Bureau of Standards(5) mit Untererd- und Unterwasserantennen diese Vermutung nahe. Rogers konnte nicht nur zeigen, daß man mit unterirdischen Antennen senden und empfangen kann, sondern daß auch drahtloser Verkehr mit untergetauchten Unterseebooten möglich ist; der anfänglichen Ablehnung durch die Fachleute als nach den bekannten Extinktionsformeln unmöglich steht die Tatsache gegenüber, daß heute alle amerikanischen Uboote mit Unterwasserantennen arbeiten, und zwar auf kurzen Wellen, die eigentlich am meisten extinguiert werden müßten.

In Aufsätzen, die nach Abschluß der vorliegenden Arbeit erschienen, untersuchen Debye und Falkenhagen(15) die Dispersion der Leitfähigkeit der Elektrolyte, die durch die sog. Relaxationszeit entsteht. Diese Änderungen fallen in einen höheren Frequenzbereich und sind zu gering, um für die Probleme der drahtlosen Telegraphie etwas zu bedeuten. In dieser Arbeit soll lediglich untersucht werden, ob für die Ausbreitung der Wellen der drahtlosen Telegraphie andere Werte maßgebend sind als die niederfrequent gemessenen.

Die Meßmethode

Ein Leitfähigkeitsgefäß, wie es gewöhnlich zur Messung nach Kohlrausch benutzt wird, stellt eine Kapazität dar, die durch die unbekannte Dielektrizitätskonstante eingefüllter, gut leitender Salzlösungen in unbekannter Weise erhöht wird. Mit Hilfe der einfachen Wechselstromgesetze läßt sich berechnen, daß der Verschiebungsstrom in diesem Gefäß den zu messenden Leitungsstrom der Größe nach für hochfrequente Schwingungen nicht nur erreicht, sondern sogar übertreffen kann. Der Verschiebungsstrom im Leitfähigkeitsgefäß muß also hierbei kompensiert werden, dabei erhält man aber, wie Nernst(8) angibt, ein recht flaches Minimum. Dazu kommt, daß eine Hochfrequenzbrücke, die 30 Jahre später mit den vervollkommenen Mitteln der Hochfrequenztechnik von H. Bruun(18) entwickelt wurde, eine größere Fehlergrenze aufweist, als sie Nernst angibt. Abgesehen von diesen Schwierigkeiten ist die Deutung des Meßresultates nach unseren heutigen Anschauungen nicht so einfach, weil sich bei diesen hohen Frequenzen der Skineffekt störend bemerkbar machen könnte.

Man müßte die vollständige Telegraphengleichung für den Fall des Leitfähigkeitsgefäßes integrieren, wobei wieder die Dielektrizitätskonstante des Elektrolyten eingehe. Außerdem liegen keine Beobachtungen über den Einfluß der Gefäßwände auf die Ausbildung des Skineffektes hierbei vor. Der gleiche Einwand ist gegen die Relativmeßmethode von Erskine(6) zu erheben.

Um den Einfluß des Verschiebungsstromes zu vermeiden und eine einfach integrierbare Differentialgleichung ohne das Eingehen der Dielektrizitätskonstante benutzen zu können, wird nach der vorliegenden Methode die Leitfähigkeit kalorimetrisch gemessen; da nämlich in einem vollkommenen Dielektrikum der Verschiebungs- im Gegensatz zum Leitungsstrom keine Wärmeentwicklung bewirkt, so folgt daraus die angegebene Vereinfachung der Auswertung.

Die vorliegenden Theorien der induktiven Heizung, die die Abhängigkeit der Erwärmung eines koaxial in einer Spule befindlichen zylindrischen Leiters in Abhängigkeit von der Frequenz der an die Spule angeschlossenen Wechselstromquelle, von der Windungsdichte und Länge der Spule, der Leitfähigkeit, der Permeabilität und dem Durchmesser des Zylinders, der primär eingebrachten Energie sowie etwaigen sonstigen Faktoren darstellen(9, 10, 11, 12), wurden zunächst auf ihre Zuverlässigkeit an Metallen geprüft, die nach den Versuchen von Hagen und Rubens in diesem Frequenzbereich noch konstante Leitfähigkeit haben, und es ergab sich dabei, daß man aus der Theorie von Fischer und Wever(11) mit einigen Korrekturen die Leitfähigkeit des Probekörpers berechnen kann.

Zur Theorie der induktiven Heizung

Fischer und Wever(11) leiten ihre Formeln für die induktive Heizung aus den Maxwell'schen Grundgleichungen unter folgenden Voraussetzungen ab: der Versuchskörper steht koaxial in der Heizspule und ist gleichlang wie diese; die Spule ist kurz gegen die Wellenlänge, aber lang gegen den Durchmesser des Probekörpers; die Felder sind rotationssymmetrisch und haben in der Achse ein Extremum; am Zylindermantel gilt die übliche, aus dem Energieprinzip folgende Grenz-

bedingung, die Steighöhe der Spulenwindungen ist vernachlässigbar.

Setzt man formal die in dem zu heizenden Zylinder entwickelte Wärmemenge gleich $0,239 \cdot I^2 \cdot R \cdot t$ cal, wobei I die in der Spule fließende Effektivstromstärke und t die Dauer der Heizung in Sekunden bedeutet, so heiße die so definierte Größe R der Belastungswiderstand; unter den oben angegebenen Voraussetzungen ist dieser proportional der Zylinderlänge l . Seine genaue Größe pro Zentimeter Zylinderlänge wird durch nichtelementare Formeln angegeben, die man für zwei praktisch wichtige Argumentbereiche von Frequenz \times Leitfähigkeit elementar genügend genau approximieren kann.

Für kleine Werte von Frequenz \times Leitfähigkeit, wie sie bei den Elektrolyten vorkommen, berechnen Fischer und Wever den Belastungswiderstand zu:

$$(1) \quad R = 8\pi \cdot \kappa (\pi^2 \cdot r_0^2 \cdot w \cdot f \cdot \mu)^2 \cdot l \cdot 10^{-9} \text{ Ohm};$$

für große Werte dieses Arguments, wie sie bei der hochfrequenten Heizung von Metallen auftreten, ist

$$(2) \quad R = 4\pi^2 \cdot w^2 \cdot r_0 \sqrt{\frac{f\mu}{\kappa}} \cdot l \cdot 10^{-9} \text{ Ohm}.$$

Dabei bedeuten κ die Leitfähigkeit des Heizkörpers in el.m. E., f die Frequenz in sec^{-1} (Hertz), w die Windungsdichte der Spule in cm^{-1} , r_0 den Halbmesser des zylindrischen Heizkörpers und μ seine Permeabilität.

Versteht man unter c die spez. Wärme des Heizkörpers, unter ΔT die Zunahme seiner Temperatur und ε seine Dichte, so ist offenbar die in ihm entwickelte Wärmemenge in cal

$$(3) \quad Q = 0,239 \cdot I^2 \cdot R \cdot t = \pi r_0^2 \cdot l \cdot \varepsilon \cdot c \Delta T.$$

Da in R die Leitfähigkeit enthalten ist, so kann man diese aus Gleichung (3) für hochfrequenten Strom durch Messung von Temperaturen, Längen, Zeiten, Frequenzen, Stromstärken, Dichten und spez. Wärmen bestimmen; dabei muß man jedoch durch Heizversuche, bei denen nur die Frequenz verändert wird, feststellen, ob sich die mit R proportionalen ΔT wie \sqrt{f} oder f^2 verhalten, d. h. ob man sich in einem der durch (1) oder (2) gekennzeichneten Bereiche befindet, der die elementare Berechnung von Absolutwerten

für den Belastungswiderstand bzw. die Leitfähigkeit gestattet. Das Zwischengebiet dieser beiden Approximationen wurde bei den Messungen gemieden, um stets übersichtliche Resultate zu erhalten.

Der verlangsamte Anstieg der Erwärmung für wachsende Werte von $\alpha \cdot f$ läßt sich physikalisch so deuten, daß zwar wie beim gewöhnlichen Transformator die Koppelung zwischen Primär- und Sekundärkreis mit dem Quadrat der Frequenz wächst, von gewissen Leitfähigkeitswerten an der Skineffekt aber beinahe ebenso schnell zunimmt und so den Widerstand des Sekundärsystems vermehrt.

Es möge hier auf eine mathematische Ungenauigkeit hingewiesen werden, die möglicherweise bei der Theorie der induktiven Heizung zu falschen Zahlenwerten führt. Integriert man z. B., wie Strutt(10), die Telegraphengleichung und stellt eine Ungleichung auf, der zufolge der Verschiebungsstrom in dieser Differentialgleichung klein ist gegen den Leitungsstrom, so braucht diese Ungleichung durchaus nicht auch für das Integral zu bestehen. Ist aber diese Vernachlässigung zulässig, so muß man für die Umgebung des Zylinders eine andere Vernachlässigung annehmen, und zwar darf man hier bestimmt den Leitungsstrom gegen den Verschiebungsstrom streichen.

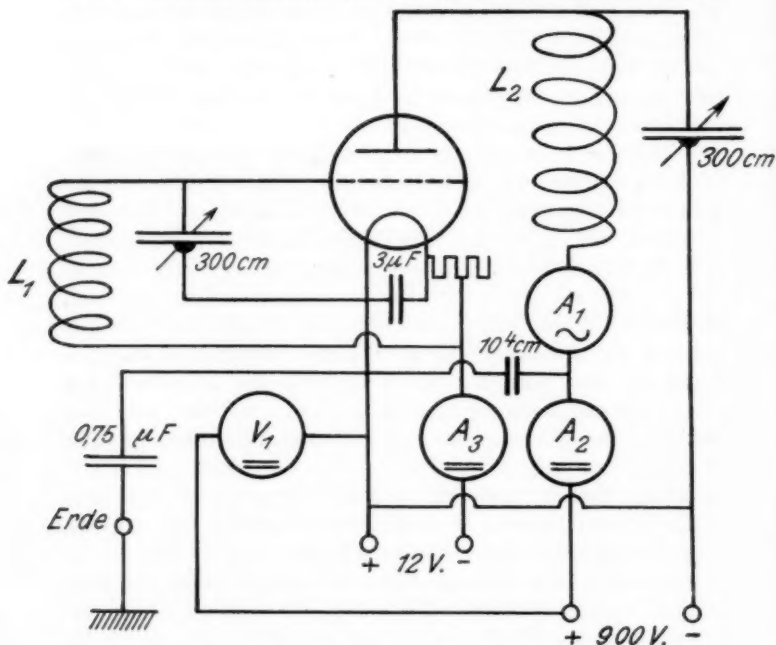
Man kommt dann zu anderen Grenzbedingungen und erhält in dem Integral auch die Energieverluste, die sich als Strahlungswiderstand der Spule äußern.

Zugleich bietet dieser Ansatz die Möglichkeit, die Umhüllung des zu heizenden Zylinders mit einem Isolator beliebiger Dielektrizitätskonstante zu behandeln und somit die den tatsächlichen Verhältnissen und Grenzbedingungen entsprechende Energiebilanz zu erhalten.

Der Sender zur Erzeugung des hochfrequenten Wechselstromes

Von den versuchten Senderschaltungen bewährte sich am besten die von Huth-Kühn, die auch wegen ihrer bekannten Oberschwingungsfreiheit vorgezogen wurde(14) (Fig. 1). Als Röhren wurden die Typen Telefunken RS 4 und RS 17 verwendet. Zunächst wurde die Konstanz des Anodenwechselstromes untersucht, und es stellte sich dabei heraus, daß

die Anodenspannung sehr konstant gehalten werden muß, und daß aus diesem Grunde die Spannungserzeugung durch rotierende Umformer versagt; brauchbar erwiesen sich nur Akkumulatoren, die wegen der beim Laden verspritzten Säureteilchen in einem besonderen Raum untergebracht wurden. Die Varta-Akkumulatoren von 1 Amp.-Stunde Kapazität waren



Die Schaltung des Senders. L_1 Gitterspule, L_2 Anodenspule, A_1 Anodenstrom-Hitzdrahtamperemeter, A_2 Anodengleichstromamperemeter, A_3 Heizstromamperemeter, V_1 Anodenspannungsvoltmeter

Fig. 1

zu je 25 Zellen auf einem Grundbrett mit Asphalt festgegossen. Von diesen 50-Voltkästen wurden 18 Stück hintereinander und eine gleiche Batterie parallel geschaltet, so daß die Gesamtkapazität 2 Amp.-Stunden bei 900 Volt betrug. Die Batterie war mit einem Schalter verbunden, der die 2.900 Volt mit einem Handgriff in 6.300 Volt zur Ladung

am 440-Volt-Lichtnetz umzuschalten gestattete. Die Batterie verlangte eine gute Wartung in bezug auf gute Kontakte, Säurestand und Säuredichte und blieb dann bei mehreren Versuchen auf etwa 3 Volt konstant. Täglich vor der ersten Messung wurde die Batterie etwa 15 Min. mit etwa 50000 Ohm belastet, um die anfängliche Überspannung wegzubringen. Als Widerstand diente dabei die Röhre selber, wobei in der Senderschaltung nur die Anodenkreisspule mit einem Draht überbrückt zu werden brauchte. Die Belastung der Batterie ließ sich dann sehr bequem durch Drehen des Heizwiderstandes regeln.

Die Heizbatterie hatte 12 Volt und 100 Amp.-Stunden; die Ladestromstärke war so groß, daß auch ohne Reservebatterie keine langen Betriebspausen auftraten. Sie mußte nicht nur täglich vor den Versuchen belastet werden, wie die Anodenbatterie, sondern vor jeder Messung, so daß sie meist den ganzen Tag über eingeschaltet blieb. Dauerte die erste Belastung kürzer als etwa 40 Min., so hatte man ein Ausschlagen des Anodenwechselstromamperemeters über den Bereich zu befürchten, was die Eichung eines Hitzdrahtinstrumentes ändern kann; auch ist es bei schnellem Absinken des Anodenstromes nicht möglich, einen hinreichend genauen Mittelwert für die Auswertung der Messung einzusetzen.

Ganz besondere Aufmerksamkeit muß man dem Regulierwiderstand im Heizkreis widmen, hängt doch die Emission des Rohres etwa von der 4. Potenz des Heizstromes ab. Selbst die gebräuchlichen Präzisionsschiebewiderstände versagten hier, und nur ein Drehwiderstand aus einem alten Telefunkenröhrensender erwies sich als brauchbar, indem er auf mechanische Erschütterungen, wie z. B. Auftreten auf den Fußboden, nicht reagierte.

Die Drehkondensatoren waren zur Erhöhung der Frequenzstabilität in Blech gekapselt; als Dielektrikum diente Luft, um durch Vermeiden von Dielektrikumsverlusten den Strom in der Anodenspule möglichst groß zu machen.

Der Anodenwechselstrom wurde mit einem Hochfrequenzhitzdrahtamperemeter von H. & B. gemessen, dessen Skala in Milliampere geteilt war. Seine Frequenzabhängigkeit wurde, den Angaben der Fabrik entsprechend, als vernachlässigbar

angenommen; Versuche mit anderen Typen ergaben dieselben Resultate. Der hierbei gemessene Strom ist ein pulsierender Gleichstrom, von dessen Quadrat man, um bei der Auswertung der Theorie zu entsprechen, das der Gleichstromkomponente abziehen muß, die in einem Drehspulinstrument gemessen wurde.

Infolge der Phasenverschiebung von beinahe 180° zwischen dem Strom in der Spule und dem im Kondensatorzweig ist der abgelesene Wechselstrom erheblich größer als der Anodengleichstrom, und da im Spulenzweig das Hitzdrahtamperemeter den Hauptwiderstand bildet, so ändert sich beim Auswechseln dieses Instrumentes der Strom etwa wie der Meßbereich.

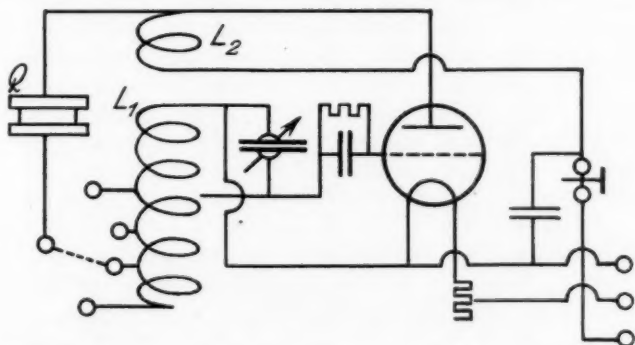
Die Frequenz des Senders (19) hängt sowohl vom Anoden- wie vom Gitterkreis ab, und man hat somit die Möglichkeit, dieselbe Frequenz bei verschiedenen Kondensatorstellungen der beiden Kreise und auch verschiedenen Anodenstromstärken zu erhalten. Bei manchen Einstellungen ändert sich der Anodenstrom und mit ihm die Frequenz sehr stark, wenn man sich dem Amperemeter nähert, um es abzulesen.

Auf den Wellen 120,15 m, 100,82 m und 74,55 m wurde die Frequenz und ihre Konstanz mit Quarzresonatoren festgestellt, die von Loewe nach einem Normal der P.T.R. geeicht waren. Da die Oberschwingungen dieser Kristalle keine ganzzahligen Vielfachen der Grundschiwingung darstellen, und die Schwingungen geradzahliher Ordnung bei der vorhandenen Fassung nicht ausgebildet sind, wurde zur Kontrolle der Welle 50,41 m ein Hilfssender mit 100,82 m in der Grundschiwingung erregt und dessen erste Oberschwingung mit der Grundschiwingung des Meßsenders zur Interferenz gebracht. Dazu wurde der Hauptsender zuerst mit einem Resonanzwellenmesser ungefähr auf 50 m eingestellt, darauf genauer, indem die Schwebungen mit dem quarzkontrollierten Hilfssender gleichgerichtet, verstärkt, einem Lautsprecher zugeführt und der hörbare Differenzton möglichst tiefgehalten wurde, jedenfalls unter 1000 Hertz.

Beim Bau des Hilfssenders waren die ersten Versuche, die Resonatoren mit kleinen Röhren, die weder große Batterien benötigen, noch viel störende Wärme entwickeln, zu betreiben erfolglos. Anscheinend war die Feldstärke in der von Loewe

angegebenen Schaltung, bei der der Kristall parallel zum Gitterkreis einer rückgekoppelten Verstärkerröhre liegt, bei Verwendung normaler Lautsprecherröhren zu klein.

Um nun eine größere Wechselspannung zu erhalten, wurde die Gitterspule als Autotransformator ausgebildet und die Rückkoppelungsspule mit einbezogen. An die Anode schaltet man einen Pol des Kristalls, den anderen an einen der in Fig. 2 gezeichneten Kontakte, bis gerade Leuchten bei Resonanz auftritt. Von der Resonanz kann man sich am *Telephon T* außerdem nach der Cadyschen Methode überzeugen. Legt



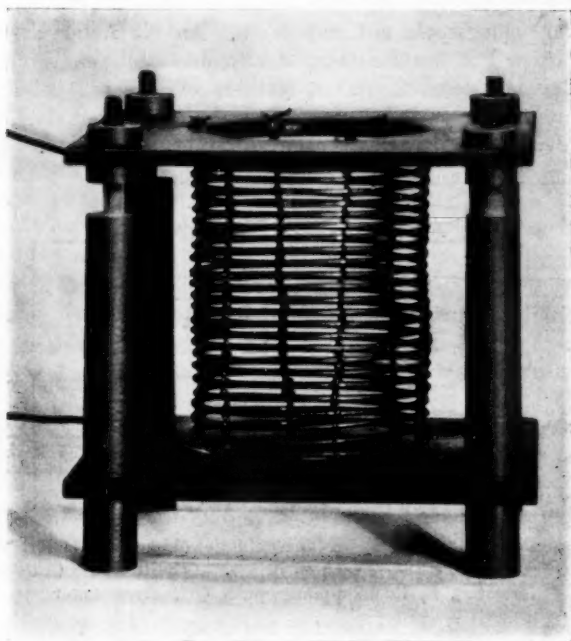
Schaltung des Hilfssenders, in dem ein gewöhnliches Verstärkerrohr einen Quarzresonator zum Leuchten bringt. L_1 Gitterspule (Autotransformator), L_2 Rückkopplungsspule, Q Quarzresonator

Fig. 2

man durch falsche Wahl eines Kontaktes am Gitterkreis eine zu hohe Wechselspannung an den Kristall, so leuchtet das Gas in dem Glaskolben in weitem Bereich um die Resonanzstelle, was die schnelle Orientierung über die Frequenz des Hilfssenders sehr erschwert. Als Röhre bewährte sich durch ihre Frequenzkonstanz am meisten die Valvo-A. 408.

Mit der benutzten Huth-Kühnschen Schaltung kann man nicht zu sehr viel schnelleren Schwingungen als $6 \cdot 10^6$ gelangen, ohne den unten beschriebenen Wärmeschutz zu benötigen. Eine Methode, statt der Erwärmung des Elektrolyten die Änderung der Wellenlänge des Senders zu messen, schei-

terte daran, daß das Gefäß mit dem Elektrolyten als eine Parallelkapazität zum Schwingungskreis wirkte und so bei manchen Elektrolyten eine Änderung der Frequenz nicht auftrat, indem die Verminderung der Selbstinduktion durch Rück-



Ansicht der körperlosen Anodenkreisspule

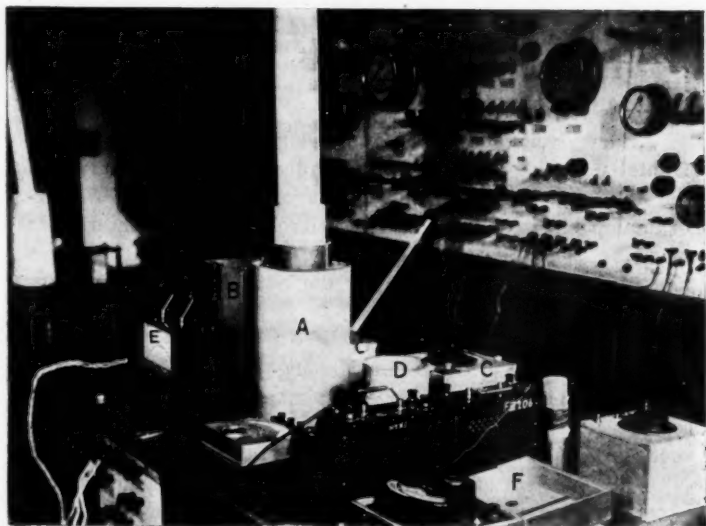
Fig. 3

wirkung durch die gleichzeitige Vermehrung der Parallelkapazität ausgeglichen wurde.

Wie man aus dem Schaltschema, Fig. 1 ersieht, sind alle nur Gleichspannung führenden Teile möglichst an Erde gelegt; das geschah aus Sicherheitsgründen, weil sich sonst bei langen Serien von Messungen ein versehentliches Berühren Hochspannung führender Teile nicht vermeiden läßt. Von dem beschriebenen Sender wurden zwei Exemplare benutzt, teils zur Beschleunigung der Messungen, teils um zu bestätigen, daß

dieselbe Messung in verschiedenen Versuchsanordnungen dieselben Resultate ergibt.

Die Anodenkreisspule, die aus den unten erwähnten Gründen keinen Körper haben darf, wurde aus 2-mm Kupferrohr zunächst auf einen Zylinder von etwa 4 cm Durchmesser gerollt, wonach sie mit etwa 6 cm Durchmesser aufsprang. Hierauf wurde diese Spirale auf ein Messingrohr von 6,1 cm Durchmesser gewickelt, das parallel zur Achse alle 60° Schlitze



Ansicht des Senders. *A* Wattmantel der Senderöhre, *B* der Anodenkreisspule, *C* Drehkondensatoren, *D* Gitterspule, *E* Hitzdrahtampere-meter, *F* Anodenspannungsvoltmeter

Fig. 4

im Mantel enthielt, die etwas länger als die Spule waren. Durch diese Schlitze hindurch wurde nun jede Windung an die nächste genäht, so daß man zum Schluß eine sechsfach genähte Spule erhielt, deren Steighöhe durch die Dicke des verwendeten Fadens und die Zahl der Knoten bestimmt und bei einiger Übung recht gleichmäßig wurde. Die Spule wurde dann mit ihren Enden an zwei konzentrisch ausgeschnittene

dünne Hartgummiplatten genäht, die ihrerseits wieder durch Galalithstäbe in richtigem Abstand gehalten wurden (Fig. 3).

Ist die Spule durch Muttern, die sich am Ende der Galalithstangen befinden, straff angezogen worden, so werden die Fäden an ihr erst mit Alkohol und dann mehrmals mit Bakelitlack getränkt, der nach dem Erhärten die Spule mechanisch fest macht und Wasseraufnahme durch den Faden verhindert.

Die untere Platte enthält eine kreisförmige Vertiefung von 4 cm Durchmesser, in die das Gefäß konzentrisch in Höhe des unteren Spulenendes hineinpaßt; mit 3 cm Durchmesser ist die Platte ganz durchbohrt, um die Dielektrikumsverluste herabzusetzen.

Einen vollständigen Sender zeigt Fig. 4; dabei ist *A* Mantel und Schornstein der Senderöhre, *B* Wärmeschutz um die Anodenspule, *C* Drehkondensatoren, *D* Gitterspule, *E* Hitzdrahtamperemeter, *F* Anodenbatterievoltmeter. Dahinter sieht man die Schalttafel, auf der sich die Schalter, Sicherungen und übrigen Meßinstrumente für die Sender befinden.

Maßnahmen zur Verminderung der Fehlergrenze

Die ersten Versuche mit Messing- und Bleizylinder, die durch die Wirbelströme der Abstimmungsspule eines Röhrensenders geheizt wurden, ergaben bei Wiederholung der Versuche große Abweichungen der einzelnen Meßresultate vom Mittel.

Die Temperaturabnahme geheizter Metallzylinder in Abhängigkeit von der Zeit zeigte, daß diese langsam genug vor sich geht, wenn das Metall nicht wärmer als etwa 1° gegen die Umgebung ist. Deshalb wurde die Heizdauer bei jedem Versuch so bemessen, daß die Erwärmung unter 1° blieb.

Sind nun aber die Temperaturerhöhungen des Metalls nicht mehr sehr groß gegen die Schwankungen der Außentemperatur, so wachsen dadurch wieder die Fehler. Nachdem die Spule, in der sich der Probekörper befand, mit einem doppelten Pappmantel umgeben und der Zwischenraum dieser beiden Wände lose mit Watte gestopft worden war, teilten sich $0,1^{\circ}$ -Schwankungen der Außentemperatur dem Metall erst nach Stunden mit, so daß in der Vorperiode der Messung die Temperatur des Metalles für die mehrfache Länge der Ver-

suchsdauer auf halbe $\frac{1}{100}$ Grade konstant gehalten werden konnte.

Größere Schwankungen der Zimmertemperatur wies der zu den Messungen benutzte Kellerraum nicht auf; der Einfluß der Mittagssonne, der sich im Anfang bemerkbar machte, ließ sich durch Verschließen des einzigen Fensters mit mehreren Vorhängen beseitigen. Am günstigsten waren die Verhältnisse in der Nacht, in der daher auch die meisten Messungen gemacht wurden. Die Schnelligkeit und Genauigkeit der Messungen hängt von der Übung in der Konstanthaltung der Zimmertemperatur ab; es empfiehlt sich, sie etwas über der Außentemperatur zu halten, so daß man durch Ventilieren die Zimmertemperatur schnell um einige $0,1^{\circ}$ ändern kann.

Störend machte sich zunächst die Wärmestrahlung der Senderöhre bemerkbar, deren Kathode etwa 40 Watt Heizleistung verbrauchte. Nachdem die Röhre ebenso wie die Spule in einen doppelten Pappzylinder mit Wattezwischenfüllung gestellt worden war, der oben in einen langen Schornstein endete, ließ sich ein Einfluß dieser Wärmequelle auf die Temperatur des Metalles nicht mehr nachweisen. Der Heizwiderstand konnte deshalb nicht stören, weil er sich in einigen Metern Entfernung befand.

Die Versuche, die jetzt vorgenommen wurden, zeigten nach Abschalten des Senders bis über 1 Stunde ein Ansteigen der Temperatur des Metalles um etwa den gleichen Betrag wie den errechneten Temperaturanstieg. Dies wurde zunächst auf die in dem Spulendraht dissipierte Joulesche Wärme zurückgeführt, die nach bekannten Skineffektformeln abgeschätzt wurde. Beschickte man aber die Spulen mit Gleichstrom, dessen Betrag entsprechend der Widerstandsvermehrung durch den Skineffekt erhöht war, so konnten diese Erwärmungen nicht reproduziert werden. Es zeigte sich schließlich, daß die Störungen von der Wärme herrühren, die in dem damals noch benutzten Spulenkörper als einem unvollkommenen Dielektrikum dissipiert wird (13). Besonders unvorteilhaft erwiesen sich dabei Spulen auf Pappkörpern, einem typischen geschichteten Dielektrikum (Papier-Leim-Papier); aber auch Preßspan, Porzellan und Glas waren unbrauchbar. Es wurden die (S. 74/75) oben beschriebenen körperlosen Spulen entwickelt,

die diesen Fehler vermeiden; bei Benutzung dieser Spulen blieb die Temperatur nach Abschalten des Senders auf mindestens 15 Min. wenigstens auf $0,005^{\circ}$ konstant; nur die ersten Sekunden stieg sie noch etwas an, indem die Wärme, die gemäß dem Skineffekt an der Oberfläche des Metallzylinders erzeugt wurde, sich erst verteilte. Die Wärmemenge, die von der Spule jetzt dem Jouleschen Gesetze entsprechend nur noch im Draht erzeugt wurde, diente dazu, den Strahlungsverlusten vorzubeugen; bei diesen Versuchen stellte sich nämlich heraus, wie man ungefähr die Windungsdichte der Spule zu wählen hat, damit die in dem Spulendraht entwickelte Wärme eine Temperatur des von dem Wattenmantel begrenzten eigentlichen Meßraumes herstellt, die gerade etwa $0,1^{\circ}$ unter der Endtemperatur des Probekörpers bleibt.

Elektrolyte mußten wegen ihrer viel schlechteren Wärmeleitfähigkeit vor jeder Thermometerablesung sorgfältig gerührt werden, da sich in der Flüssigkeit sonst leicht verschieden warme Schichten bildeten, die Fehler von mehreren $\frac{1}{10}$ Grad bewirkten. Vor dem Einschalten des Senders wurden Thermometer und Rührer, um das berechnete Feld nicht zu stören, aus dem Elektrolyten herausgenommen und in ein anderes Gefäß gleichen chemischen Inhaltes gebracht; dieses Gefäß wurde während des Versuches unter Umrühren in der Hand auf die Endtemperatur des Elektrolyten in der Heizspule erwärmt, die durch Vorversuch bekannt war; auf diese Weise erübrigen sich Korrekturen am Meßresultat für den Wärmetransport durch Thermometer und Rührer.

Durch Versuche war festgestellt worden, daß bei der angewandten Art des Rührens die Flüssigkeit nicht merkbar wärmer wurde. Es wurde auch darauf Rücksicht genommen, daß von der benutzten schwachen Lichtquelle nichts zu dem Elektrolyten gelangte, so daß auch Erwärmungen von dieser Seite ausgeschlossen erscheinen.

Das zur Elektrolytmessung benutzte Thermometer von A. Haak-Jena war in $\frac{1}{100}$ Grade geteilt und gestattete die Schätzung von $0,005^{\circ}$.

Das Chronometer wurde täglich mit dem Nauener Zeitsignal verglichen, um Gewißheit über die Richtigkeit der Zeitmessung zu haben.

Heizversuche mit Metallen

Versuche wurden zunächst mit Blei- und Messingzylindern angestellt, wobei die Werte für Leitfähigkeit¹⁾, spezifische Wärme und Dichte Tabellen entnommen wurden. Da Fischer und Wever Versuche mit niedrigeren Frequenzen schon ausgeführt hatten, wurde ein Schwingungsbereich von $7,5 \cdot 10^5$ bis $3 \cdot 10^6$ Hertz gewählt. Die Zylinder hatten oben eine zentrische Bohrung mit Quecksilberfüllung, in der das Thermometer auch beim Arbeiten des Senders verblieb; wegen des starken Skineffektes schien das unbedenklich.

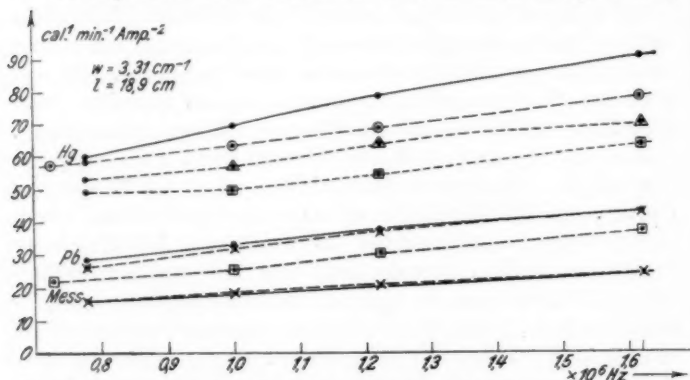
Die Frequenzen wurden durch Interferenz mit einem rückgekoppelten Siemens-Rundfunkempfänger bestimmt, der seinerseits wieder auf Rundfunkstationen abgestimmt war. Da die deutschen Stationen mit Quarzresonatoren auf Promille genau abgestimmt sind, so erschien dieses Verfahren genau genug, besonders da ja auch in diesem Argumentbereich die Frequenz nur mit ihrer Quadratwurzel in die Formel für die Erwärmung eingeht. Die Zylinder hatten 40,0 mm Durchmesser und waren der Spulenlänge entsprechend 189 mm lang. Die Heizdauer betrug etwa 1 Min., und da man beim Ein- und Ausschalten der Anodenspannung je $\frac{1}{2}$ Sek. Zeitfehler begehen kann, so erscheint bei 60 Sek. Versuchsdauer die erzielte Genauigkeit von $\pm 1,5$ Proz. befriedigend. Die experimentell gefundenen Wärmemengen passen sich den berechneten besser an, als bei Fischer und Wever, was wohl auf die erwähnten Maßnahmen zurückzuführen ist.

Dagegen ergaben sich beim Quecksilber zunächst kleinere Werte als berechnet. Bei den Versuchen befand sich zuerst das Hg in einem Präparierglas aus 2 mm starkem Glas mit flachem Boden und einer lichten Weite von 40 mm. Es lag nun der Gedanke nahe, daß das Glas vermöge seiner hohen Dielektrizitätskonstante die Grenzbedingungen am Zylindermantel und dadurch die Stromverdrängung im Metall ändert. Versuche mit dünnerem Glas ergaben auch Resultate, die besser zu den errechneten Werten paßten, und Messungen mit Quarzgefäßen lieferten noch größere Werte.

Die Hypothese, daß diese Vermehrung des Skineffektes

1) Nur die Messingleitfähigkeit wurde gemessen und zwar zu $\kappa_{18} = 1,408 \cdot 10^{-4}$ el.m. E.

von dem Argument Dielektrizitätskonstante (ϵ) \times Wandstärke (D) abhängt, scheint richtig. Trägt man nämlich für konstante Wellenlänge als Abszisse $\epsilon \times D$ auf, als Ordinate die erzielten Wärmemengen (Fig. 6) bzw. den Belastungswiderstand, so kann man innerhalb der Fehlergrenze für $\epsilon \times D = 0$ auf den berechneten Wert linear extrapolieren. Als Gefäßwandstärken sind dabei Mittel aus Messungen an verschiedenen Stellen des Gefäßes eingesetzt, da Gefäße überall gleicher Wandstärke nicht zu erhalten sind; die Dielektrizitätskonstanten wurden, nachdem die Glaszylinder innen und außen mit Stanniol belegt waren,



Die Erwärmung von Metallzylindern bezogen auf 1 Min. und 1 Amp. in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Länge der Spulen betrug 18,9 cm, die Windungsdichte $3,31 \text{ cm}^{-1}$. Von oben nach unten folgen vier Kurven für Hg, drei für Pb, zwei für Messing.

Die Zahlenwerte für diese Figur stehen in Tab. 3.

- nach (2) berechnete Werte, \times ohne Umhüllung, \odot in Quarz,
- \triangle in 1 mm dickem, \square in 2 mm dickem Glas gemessene Werte

Fig. 5

aus der gemessenen Kapazität der beiden Belegungen zueinander berechnet.

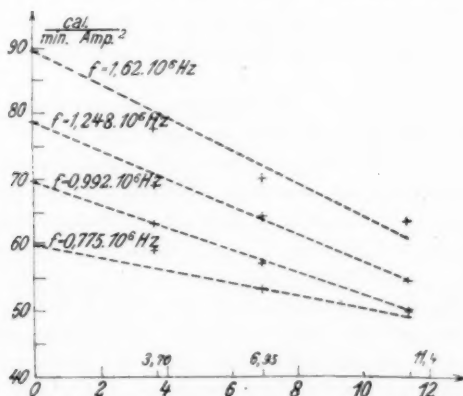
Um diese Resultate nochmals zu prüfen, wurde ein Weichbleizylinder in ein gleich langes Glasrohr eingepreßt, so daß er überall am Glas dicht anlag, und dann die Erniedrigung der Erwärmung durch die Glaswand nachgewiesen.

Man sieht in Fig. 5 und 6, die die folgende Tabelle veranschaulichen, wie tatsächlich bei den gemessenen vier Fre-

quenzen die nach Fischer und Wever mit Formel (2) berechneten und auf der Ordinate eingetragenen Werte extrapoliert werden können.

Tabelle 1

| | 0,774 | 0,775 | 0,992 | 1,248 | 1,620 | $\times 10^8$ Hertz |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|--|
| Hg berechnet | — | 60,48 | 69,84 | 78,37 | 89,28 | Erzielte Wärme- menge in cal |
| Hg gemessen in Quarz | 58,79 | — | 63,25 | 68,95 | 77,30 | |
| Hg gemessen in 1 mm dickem Glas | — | 53,18 | 57,14 | 64,30 | 69,84 | |
| Hg gemessen in 2 mm dickem Glas | — | 49,54 | 49,85 | 54,19 | 63,42 | min. Amp. ² im gesamten Zylinder bei $l = 18,9$ cm u. $w = 3,31$ cm ⁻¹ |
| Pb berechnet | — | 28,57 | 33,00 | 37,02 | 42,20 | |
| Pb gemessen | — | 26,25 | 31,83 | 37,59 | 41,07 | |
| Pb gemessen in 2 mm dickem Glas | 22,50 | — | 25,00 | 29,99 | 36,97 | |
| Messing berechnet | — | 16,62 | 19,19 | 21,56 | 24,53 | |
| Messing gemessen | — | 16,18 | 17,45 | 20,14 | 24,30 | |



Erwärmung in Abhängigkeit von Produkt Wandstärke \times Dielektrizitätskonstante des umhüllenden Mediums. Auf der Ordinatennachse sind die nach (2) und (3) berechneten Wärmemengen eingetragen. Durch diese Punkte sind Gerade gezogen, die sich den beobachteten Punkten (+) ziemlich gut anschließen; jede Gerade entspricht einer Frequenz

Fig. 6

Aus dieser Vermehrung des Skineffektes durch Umhüllung leitender Zylinder mit Medien hoher Dielektrizitätskonstante kann man umgekehrt den Schluß ziehen, daß isolierte Drähte beim Durchfließen mit hochfrequentem Strom einen stärkeren

Skineffekt als blanke zeigen; indem man bei der induktiven Heizung die Rolle der elektrischen und magnetischen Kraftlinien vertauscht, kommt man zu dieser Lösung des inversen Problems. Vielleicht ist die Widerstandsvermehrung, die man bisher den dielektrischen Verlusten der verschiedenen Drahtisoliermaterialien zuschrieb, lediglich auf diese Wirkung hoher Dielektrizitätskonstante zurückzuführen.

Die Punkte für Figg. 5 und 6 wurden durchschnittlich sechsmal gemessen und wenn sie an manchen Stellen vom theoretischen Wert abweichen, so ist das vielleicht auf Eigenschwingungen der Spule zurückzuführen. Nesper (17) fand, daß die Spulen für die Harmonischen der Eigenschwingung einen erhöhten Strahlungswiderstand aufweisen, ohne leider Absolutwerte anzugeben; und man darf bei der induktiven Heizung die Rückwirkung auf die Spule nicht nur als Belastung durch den eingebrachten Metallzylinder, sondern auch durch Strahlung deuten.

Die Voraussetzung der Theorie, daß die Spule sehr lang gegen den Durchmesser des zu heizenden Körpers ist, läßt sich schwer verwirklichen, und es fehlte zunächst auch jede Vorstellung über den zahlenmäßigen Einfluß der Spulenlänge; die angestellten Versuche zeigen, daß die Erwärmung bei Metallen sehr schnell mit abnehmender Spulenlänge wächst, während der Effekt für niedrigere Frequenzen und Leitvermögen umgekehrt ist. Die Versuche über den Einfluß der Spulenlänge bei Metallen wurden bis zu 100 m Wellenlänge ausgedehnt und ergaben, daß man die Erniedrigung der Erwärmung durch einen konstanten Spulenfaktor darstellen kann, wie das unten S. 84/85 für Elektrolyte genauer ausgeführt ist. Wenn die Messungen von Fischer und Wever mit den berechneten Werten leidlich übereinstimmen, so ist das vielleicht dem Umstand zu verdanken, daß der Einfluß der kurzen Spule durch den des Dielektrikums um den Metallzylinder ungefähr kompensiert wurde.

Aus diesen Versuchen wurde geschlossen, daß man aus der Theorie von Fischer und Wever die Leitfähigkeit des Probekörpers mit einer Genauigkeit berechnen kann, die für die oben erwähnten Probleme der drahtlosen Telegraphie genügt.

Verlauf einer Messung an Elektrolyten

Zunächst wird die Heizbatterie eingeschaltet, und die Anodenbatterie über das Senderrohr belastet. Während man einem Thermometer im Innern der Heizspule Zeit läßt, sich auf die Lufttemperatur einzustellen, mißt man die Leitfähigkeit des Elektrolyten nach Kohlrausch bei zwei verschiedenen Temperaturen und füllt ihn dann in das Gefäß, in dem er hochfrequent gemessen werden soll. Diese niederfrequente Messung vor und nach jedem Heizversuch ist unerlässlich, weil die Elektrolyte erfahrungsgemäß schnell ihre Konzentration merklich ändern. Die Flüssigkeit wird nun durch Erwärmen in der Hand und, wenn nötig, nach vorherigem Kühlen in Wasser auf die Lufttemperatur im Wärmeschutz gebracht. Ist die Temperatur des Zimmers mehr als $\frac{1}{10}^{\circ}$ von der im Wärmeschutz verschieden, so wird auch die Zimmertemperatur einigermaßen angeglichen, damit die im Wärmeschutz konstant bleibt. Ist das Gefäß außen trocken, was zur Vermeidung etwa auftretender Verdunstungskälte nötig ist, so wird es in die Heizspule gestellt und dann Thermometer und Rührer eingetaucht. Wurden vorher schon alle etwa 3 Min. Luft- und Innentemperatur gemessen und notiert, so wird jetzt auch die Elektrolyttemperatur auf ihre Konstanz überwacht. Braucht man im Anfang oft länger als eine Stunde, bis ein Temperaturgleichgewicht eingetreten ist, so erreicht man dasselbe bei wachsender Übung oft in etwa 15 Min. Die Anodenbatterie wird dann wieder ausgeschaltet und der Kurzschluß des Anodenschwingungskreises beseitigt. Ist die Elektrolyttemperatur also etwa 10–15 Min. auf $0,005^{\circ}$ konstant geblieben, so wird das Hitzdraht-Amperemeter auf seinen Nullpunkt korrigiert, Thermometer und Rührer in ein anderes Gefäß gleichen chemischen Inhaltes gestellt, und der Anodenstrom unter Beobachtung des Chronometers eingeschaltet. Während der nun begonnenen Messung wird dauernd die Wellenlänge mit dem Quarzresonator beobachtet und eventuell nachgestellt. Jede Minute werden die Anodenkreisamperemeter abgelesen. Nach Beginn der Messung wird das zweite Gefäß mit Elektrolyt, Thermometer und Rührer ungefähr auf die durch Vorversuch ermittelte Endtemperatur erwärmt. Nach der vorher festgesetzten Zeit wird dann der Sender ausgeschaltet, Thermometer und Rührer nach

Notierung ihrer Temperatur schnell wieder in den erwärmten Elektrolyten gestellt und nach sorgfältigem Durchrühren jede Minute Elektrolyt-, Wärmeschutz- und Zimmertemperatur mit Zeitangabe notiert. Steigt die Temperatur des Elektrolyten nicht mehr an und liegt die des Wärmeschutzes etwas unter ihr, so wird die Messung als verwendbar angenommen. Als Anodenstrom wird bei der Auswertung das Mittel der verschiedenen Ablesungen verwendet; der Gleichstrom bzw. sein Quadrat ist praktisch konstant gegenüber der Größe des im Hitzdrahtinstrument gemessenen Stromes.

Messungen an Elektrolyten

Nach Beendigung der beschriebenen Vorversuche wurden über 200 Messungen an wäßrigen Salzlösungen vorgenommen, und zwar in Hinsicht auf das Problem der Auslöschung von elektrischen Schwingungen in Seewasser, hauptsächlich an NaCl-Lösungen verschiedener Konzentrationen, sowie an KBr- und KCl-Lösungen. Andererseits wurden als Elektrolyte mit sehr leichten bzw. sehr schweren Ionen LiCl- und BaCl₂-Lösungen untersucht. Alle Lösungen wurden in Glas- und Quarzgefäßen gemessen, und dabei ergab sich, wie man aus Tab. 3 ersieht, daß man für beide Gefäße innerhalb der Fehlergrenze gleiche Ergebnisse bekommt, die Gefäßwand also in diesem Bereich von Frequenz \times Leitfähigkeit keinen merkbaren Einfluß auf die Ausbildung des Skineffektes besitzt.

Gleiche Elektrolyte wurden ferner in verschiedenen Spulen geheizt, teils um die Abhängigkeit der Erwärmung vom Quadrat der Windungsdichte sicherzustellen, teils um den Einfluß der Spulenlänge zu beobachten und die Methode so zu einer Absolutmessung auszugestalten, was wohl als gelungen gelten darf. Die verwendeten Spulen, sämtlich wieder von 6,3 cm Durchmesser, sind in der folgenden Tab. 2 zusammengestellt.

Tabelle 2

| Spulen Nr. | Länge cm | Windungsdichte cm ⁻¹ | Selbstinduktion cm | Spulenfaktor |
|---------------|-------------|------------------------------------|-----------------------|--------------|
| 2 | 11,7 | 3,58 | $6,36 \cdot 10^4$ | 0,98 |
| 3 | 8,5 | 3,55 | $3,09 \cdot 10^4$ | 1,36 |
| 4 | 8,5 | 2,91 | $2,70 \cdot 10^4$ | 1,36 |
| 6 | 8,5 | 1,50 | $7,07 \cdot 10^3$ | 1,36 |
| 7 | 18,9 | 1,57 | $1,80 \cdot 10^4$ | 1,00 |

Die erste Spalte gibt die Nummer der Spule an, wie man sie für jeden Versuch in Tab. 3 findet, die folgende zeigt die Länge der Spule an, die nächste die mittlere Windungsdichte. Spalte 4 gibt die Selbstinduktion an, die auf den Wellen 120,15 m und 100,82 m bestimmt wurde. Die letzte Spalte endlich enthält den experimentell bestimmten Spulenfaktor, wie man ihn aus Tab. 3 berechnet. Er ist identisch mit dem „Formfaktor“ von Fischer und Wever (a. a. O. S. 160), einem nach der Annahme dieser Autoren konstanten Koeffizienten, durch den man die Diskrepanz korrigieren möchte, die zwischen der Wirksamkeit der von der Theorie geforderten sehr langen Spule und der aus praktischen Gründen verwendeten kurzen Spule zu erwarten ist. Die vorliegenden Versuche zeigen zwar, daß der Einfluß der Spulenlänge in den beiden oben durch verschiedene Approximationen für die Erwärmungsformel gekennzeichneten Argumentbereichen umgekehrt ist; andererseits aber ersieht man aus Tab. 3 (z. B. durch Division der in Tab. 3 fettgedruckten $M(R)$ -Werte¹⁾, wobei man für verschiedene Frequenzen gleiche Quotienten = Spulenfaktoren erhält), daß für den Bereich der Elektrolyte dieser Faktor tatsächlich eine Konstante ist. Wir definieren hier den Spulenfaktor als denjenigen Faktor, mit dem man den für die Längeneinheit einer kurzen Spule gemessenen Belastungswiderstand multiplizieren muß, um den in einer sehr langen Spule gemessenen oder zu erwartenden Wert zu erhalten.

Obwohl mit Spule 2 nur relativ wenige Versuche vorliegen, darf man gemäß den angegebenen Fehlergrenzen annehmen, daß diese Spule im wesentlichen dieselben Resultate wie Nr. 7 (Tab. 2) ergibt, und da man dann durch Extrapolation zu der Annahme gelangt, daß noch längere Spulen keine anderen Werte liefern, ist der Spulenfaktor der längsten Spule gleich 1,00 gesetzt worden. Die Werte für die Spulen 3, 4 und 6 stimmen dann sehr befriedigend überein, was bei ihrer gleichen Länge dafür spricht, daß dieser Faktor tatsächlich hier nur von der Länge abhängt.

Auch wenn sich herausstellen sollte, daß dieser Spulenfaktor vom Argument $\text{Spulenlänge/Spulendurchmesser } (l/D)$ ab-

1) Vgl. Anmerkung 1 auf S. 90.

hängt, was auf Grund der vorliegenden Versuche nicht entschieden werden kann, so sieht man doch, daß dieser Spulenfaktor sicher nicht mit dem Korrektionsfaktor von Kordörfer (19) identisch ist, der seinerseits von l/D abhängt und bei Benutzung einer elementaren Selbstinduktionsformel zur Beseitigung des Einflusses der mangelnden Spulenlänge dient. Diese Annahme der Identität wäre theoretisch recht plausibel gewesen, jedoch haben die beiden Funktionen, für l/D als Argument betrachtet, einen verschiedenen Verlauf.

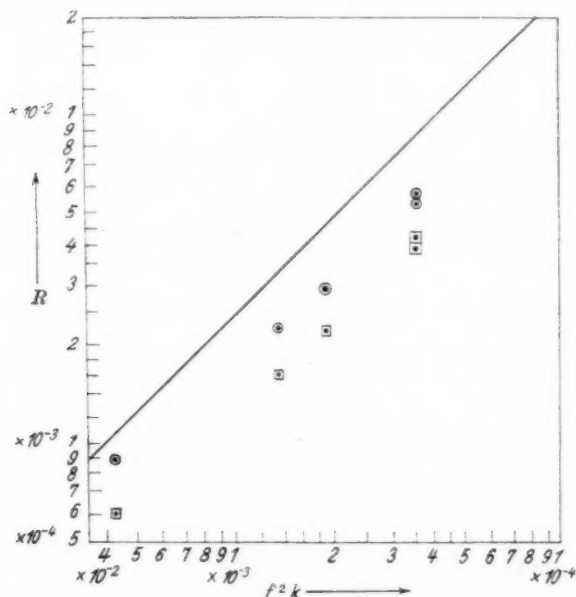
Der Grund, weshalb nur gutleitende Elektrolyte mit der längsten Spule gemessen wurden, ist der, daß durch die Wellenlänge des Senders eine obere Grenze der Selbstinduktion vorgeschrieben ist; diese muß man durch Verkürzung der Spule einhalten, denn wollte man die Selbstinduktion durch eine geringere Windungsdichte herabsetzen, so würde man bei schlechter leitenden Elektrolyten zu geringe Erwärmungen und damit zu große Fehler erhalten.

Die Gefäßradien, die in diesem Argumentbereich nach der Theorie von Fischer und Wever mit der 4. Potenz eingehen, wurden ihrer Wichtigkeit entsprechend durch Auswägen mit Wasser bestimmt; diese Methode hat außerdem noch den hier sehr wichtigen Vorzug, einen quadratischen Mittelwert der Radien zu liefern. Bei den Elektrolytmessungen wurden 3 Gefäße benutzt, die etwa 1—0,7 mm Wandstärke hatten, und zwar ein Quarzgefäß (Qa in Tab. 3) von $r_0 = 1,919$ cm, ein anderes (Qn) von $r_0 = 1,899$ cm und ein Gefäß aus Thüringer Gerätéglass (Th) von $r_0 = 1,884$ cm.

Die Gefäße hatten in Höhe des oberen Spulenendes Marken, bis zu denen sie mit Lösung gefüllt wurden. Die genaue Einhaltung dieser Füllhöhe hat keine große Bedeutung, denn Versuche ergaben, daß ein Abweichen um einige Millimeter von der angezeichneten Marke keinen Einfluß auf die pro Längeneinheit des Zylinders reduzierte gemessene Erwärmung hatte, vielmehr die im gesamten Zylinder dissipierte Wärmemenge auch dann noch der Füllhöhe proportional ist, wenn die von der Theorie vorausgesetzte gleiche Länge von Füllhöhe und Spulenlänge nicht genau besteht.

Die Tab. 3 ist, den 4 benutzten Wellenlängen entsprechend, in 4 Teile geteilt; in jedem gibt Spalte I das Salz an, II seine

Gewichtsprozente in der Lösung, III die angenommene Dichte der Lösung, IV die eingesetzte spez. Wärme der Lösung, V die Spulenummer, VI die auf 18°C reduzierte, nach Kohlrausch gemessene Leitfähigkeit, VII das benutzte Gefäß, VIII das Argument $f^2 \cdot \kappa$ in sec^{-2} el.m. E., wie es als Abszisse in Fig. 7a u. 7b der graphischen Darstellung von Tab. 3 aufgetragen ist. Spalte IX



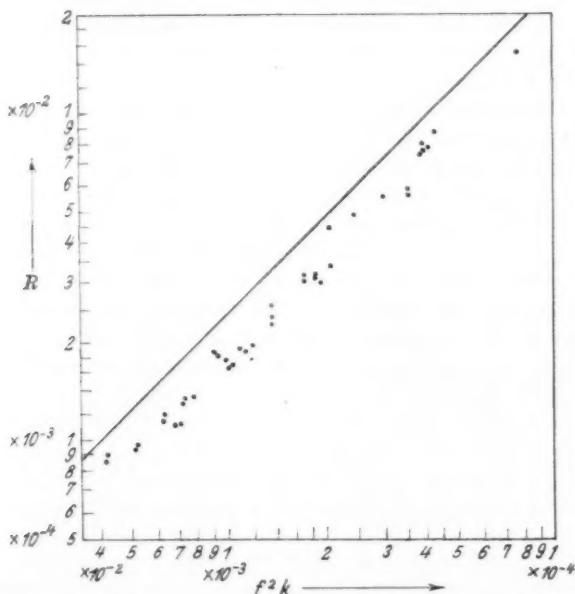
In dieser Figur sind diejenigen Beobachtungen der Tab. 3 eingetragen, die sowohl mit kurzen (□), als auch mit langen (○) Spulen erhalten wurden. Der $\log f^2 \kappa$ ist Abszisse, der \log des Belastungswiderstandes R Ordinate. Die Konstanz des senkrechten Abstandes zweier zusammengehöriger Punkte ist ein Maß für die behauptete Konstanz des Spulenfaktors. Die ausgezogene Gerade entspricht den mit niederfrequenten Leitfähigkeiten berechneten R

Fig. 7a

verzeichnet den Belastungswiderstand in 10^{-4} Ohm, wie er aus den gemessenen Temperaturerhöhungen durch Multiplikation mit dem Wasserwerte des Elektrolyten und mit Maßsystemkonstanten, sowie durch Reduktion aller Variablen

auf Sekunden, Ampere, $w = 1$, $l = 1$ und 18°C aus Formel (3) berechnet wurde. Spalte X endlich gibt den Mittelwert $M(R)$ von IX an.

In Fig. 7a sind diejenigen Werte $M(R)$ der Tab. 3, die bei gleichem Elektrolyt und gleicher Frequenz mit langen und mit kurzen Spulen beobachtet wurden, eingezeichnet. Der senkrechte Abstand zweier korrespondierender Punkte ist der



In dieser Figur sind Abszisse und Ordinaten die gleichen wie in Fig. 7a; dieselben Beobachtungen mit langen Spulen sind auch unverändert eingezeichnet. Ferner sind alle mit kurzen Spulen gewonnenen Werte, wie sie in Tab. 3 enthalten sind, mit den zugehörigen Spulenfaktoren multipliziert eingetragen

Fig. 7b

log des Spulenfaktors; die Konstanz dieser Abstände also ein Maß für die des Spulenfaktors. Die ausgezogene Gerade entspricht den mit niederfrequenten Leitfähigkeiten berechneten R . In Fig. 7b sind alle Beobachtungen aus Tab. 3

Tabelle 3

1. Wellenlänge = 50,41 m; $f^2 = 3,542 \cdot 10^{13} \text{ Hz}^2$

| I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X |
|-------------------|----------|--------|--------|--------------|---------------|------------|-------------------------|----------------|-------------------|
| Salz | p % | s | c | Spul- Nr. | κ_{18} | Ge- faß | $\kappa_{18} \cdot f^2$ | $10^4 \cdot R$ | $10^4 \cdot M(R)$ |
| NaCl | ges. | 1,2014 | 0,7740 | 6 | 0,2161 | Th | $7,65 \cdot 10^3$ | 100,5 | 100,76 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 96,67 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 101,4 | |
| " | " | " | " | " | " | Qn | " | 102,3 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 101,8 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 101,9 | |
| NaCl | 9,17 | 1,0648 | 0,902 | 6 | 0,1120 | Th | $3,97 \cdot 10^3$ | 56,58 | 55,78 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 56,33 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 54,44 | |
| NaCl | 9,13 | 1,0645 | 0,902 | 6 | 0,1116 | Qn | $3,96 \cdot 10^3$ | 57,18 | 56,57 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 56,33 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 56,20 | |
| NaCl | 5,10 | 1,0352 | 0,942 | 6 | 0,06826 | Th | $2,43 \cdot 10^3$ | 37,27 | 35,72 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 36,32 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 33,71 | |
| NaCl | 5,08 | 1,0351 | 0,942 | 6 | 0,0680 | Qn | $2,41 \cdot 10^3$ | 35,63 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 35,28 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 35,63 | |
| KCl | 9,05 | 1,0576 | 0,889 | 6 | 0,1229 | Th | $4,35 \cdot 10^3$ | 61,26 | 61,90 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 64,37 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 59,09 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 60,22 | |
| KCl | 8,90 | 1,0572 | 0,889 | 6 | 0,1223 | Qn | $4,34 \cdot 10^3$ | 62,20 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 63,21 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 62,93 | |
| KBr | 8,97 | 1,0662 | 0,889 | 6 | 0,8246 | Qn | $2,94 \cdot 10^3$ | 39,99 | 40,50 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 39,02 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 40,40 | |
| KBr | 8,94 | 1,0662 | 0,889 | 6 | 0,0246 | Qn | $2,92 \cdot 10^3$ | 41,12 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 40,72 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 41,72 | |
| BaCl | 7,66 | 1,0710 | 0,907 | 6 | 0,05701 | Th | $2,02 \cdot 10^3$ | 34,62 | 32,34 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 31,64 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 31,70 | |
| BaCl ₂ | 7,64 | 1,0706 | 0,907 | 6 | 0,05695 | Qn | $2,02 \cdot 10^3$ | 32,15 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 31,42 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 32,51 | |
| LiCl | 8,54 | 1,0479 | 0,896 | 6 | 0,1078 | Th | $3,82 \cdot 10^3$ | 53,00 | 54,44 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 54,84 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 55,48 | |

Tabelle 3 (Fortsetzung)

1. Wellenlänge = 50,41 m; $f^2 = 3,542 \cdot 10^{13} \text{ Hz}^2$

| I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X |
|------|------------|--------|-------|--------------|---------------|------------|-------------------------|----------------|-------------------|
| Salz | p o/o | s | e | Spul- Nr. | κ_{18} | Ge- fäß | $\kappa_{18} \cdot f^2$ | $10^4 \cdot R$ | $10^4 \cdot M(R)$ |
| LiCl | 8,50 | 1,0477 | 0,896 | 6 | 0,1072 | Qa | $3,80 \cdot 10^3$ | 52,90 | } 53,82 |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 53,85 | |
| " | " | " | " | " | " | " | " | 53,22 | |

2. Wellenlänge = 74,55 m; $f^2 = 1,619 \cdot 10^{13} \text{ Hz}^2$

| | | | | | | | | | |
|-------------------|------|--------|--------|---|---------|----|-------------------|--|---------|
| NaCl | ges. | 1,2014 | 0,7740 | 7 | 0,2161 | Th | $3,50 \cdot 10^3$ | | 57,12 |
| " | " | " | " | 6 | " | " | " | | 39,57 |
| " | " | " | " | 4 | " | " | " | | } 42,07 |
| " | " | " | " | " | " | Qa | " | | |
| NaCl | 9,18 | 1,0648 | 0,902 | 4 | 0,1125 | Th | $1,82 \cdot 10^3$ | | 23,38 |
| " | 9,15 | 1,0648 | 0,902 | 4 | 0,1123 | Qa | $1,82 \cdot 10^3$ | | 24,65 |
| KCl | 9,15 | 1,0582 | 0,887 | " | 0,1245 | Th | $2,02 \cdot 10^3$ | | 26,10 |
| " | " | " | " | " | " | Qa | " | | 26,41 |
| KBr | 9,02 | 1,0666 | 0,890 | " | 0,08328 | Th | $1,35 \cdot 10^3$ | | 17,41 |
| " | 8,90 | 1,0657 | 0,889 | " | 0,08209 | Qa | " | | 18,86 |
| BaCl ₂ | 7,63 | 1,0706 | 0,907 | " | 0,05695 | Th | $9,22 \cdot 10^2$ | | 13,62 |
| LiCl | 8,14 | 1,0455 | 0,900 | " | 0,1037 | Qa | $1,68 \cdot 10^3$ | | 22,53 |

3. Wellenlänge = 100,82 m; $f^2 = 8,854 \cdot 10^3 \text{ Hz}^2$

| | | | | | | | | | |
|------|------|--------|-------|---|---------|----|-------------------|--|---------------------|
| NaCl | ges. | 1,2014 | 0,774 | 7 | 0,2161 | Th | $1,91 \cdot 10^3$ | | 30,93 |
| " | " | " | " | 4 | " | " | " | | 22,74 ¹⁾ |
| " | " | " | " | " | " | Qa | " | | 22,67 |
| " | " | " | " | 3 | " | " | " | | 22,91 |
| " | 9,47 | 1,0665 | 0,900 | 4 | 0,1144 | Th | $1,01 \cdot 10^3$ | | 12,80 |
| " | " | " | " | 3 | " | " | " | | 12,90 |
| " | 9,27 | 1,0655 | 0,902 | 4 | 0,1131 | " | $1,00 \cdot 10^3$ | | 13,28 |
| " | 9,40 | 1,0665 | 0,900 | 3 | 0,1145 | Qa | $1,01 \cdot 10^3$ | | 12,86 |
| " | 5,30 | 1,0362 | 0,940 | " | 0,07029 | Th | $6,23 \cdot 10^2$ | | 8,999 |
| " | " | " | " | " | 0,07029 | Qa | " | | 8,556 |
| KCl | 9,87 | 1,0630 | 0,887 | " | 0,1342 | Th | $1,19 \cdot 10^3$ | | 12,95 |
| " | " | " | " | " | 0,1342 | Qa | " | | 14,50 |
| " | 9,10 | 1,0580 | 0,889 | 4 | 0,1239 | " | $1,10 \cdot 10^3$ | | 13,73 |
| KBr | 9,02 | 1,0666 | 0,890 | " | 0,08328 | Th | $7,38 \cdot 10^2$ | | 9,547 |
| " | 8,90 | 1,0657 | 0,889 | " | 0,08209 | Qa | $7,35 \cdot 10^2$ | | 9,714 |
| LiCl | 9,12 | 1,0512 | " | 3 | 0,1132 | Th | $1,00 \cdot 10^3$ | | 12,67 |
| " | 8,54 | 1,0479 | " | 4 | 0,10765 | Qa | $9,54 \cdot 10^2$ | | 12,69 |

1) 30,93: 22,74 = 1,36 = Spulenfaktor 4; bei $\lambda = 74,55 \text{ m}$ (vgl. o.) war 57,12: 42,07 auch gleich 1,36.

Tabelle 3 (Fortsetzung)

4. Wellenlänge = 120,15 m; $f^2 = 6,233 \cdot 10^{12} \cdot \text{Hz}^2$

| I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X |
|------|----------|--------|--------|--------------|---------------|------------|-------------------------|----------------|-------------------|
| Salz | p % | s | c | Spul- Nr. | κ_{18} | Ge- fäß | $\kappa_{18} \cdot f^2$ | $10^4 \cdot R$ | $10^4 \cdot M(R)$ |
| NaCl | ges. | 1,2014 | 0,7740 | 2 | 0,2161 | Th | $1,35 \cdot 10^3$ | | 22,70 |
| " | " | 1,2014 | 0,7740 | 4 | 0,2161 | " | $1,35 \cdot 10^3$ | | 16,29 |
| " | 9,27 | 1,0655 | 0,902 | 3 | 0,1131 | " | $7,04 \cdot 10^2$ | | 8,366 |
| " | 5,30 | 1,0362 | 0,940 | 2 | 0,07029 | Qa | $4,38 \cdot 10^2$ | | 9,228 |
| " | 5,12 | 1,0353 | 0,942 | 4 | 0,06848 | Th | $4,26 \cdot 10^2$ | | 6,101 |
| KCl | 9,15 | 1,0582 | 0,889 | 4 | 0,1245 | " | $7,76 \cdot 10^2$ | | 10,06 |
| " | 9,10 | 1,0580 | 0,899 | 4 | 0,1239 | Qa | $7,72 \cdot 10^2$ | | 10,08 |
| KBr | 9,02 | 1,0666 | 0,890 | 4 | 0,08328 | Th | $5,19 \cdot 10^2$ | | 6,989 |
| " | 8,90 | 1,0657 | 0,889 | 4 | 0,08209 | Qa | $5,16 \cdot 10^2$ | | 6,840 |
| LiCl | 8,79 | 1,0491 | 0,893 | 3 | 0,10955 | Th | $6,88 \cdot 10^2$ | | 8,260 |

eingetragen, die $M(R)$ -Werte der langen Spulen mit den dort angegebenen Werten, die der kurzen mit den zugehörigen Spulenfaktoren multipliziert und somit auf die theoretisch vorausgesetzte Länge reduziert. Man sieht, inwieweit diese Punkte die ausgezogene Gerade, die die nach Formel (1) und (3) berechneten Werte darstellt, erreichen.

Jedenfalls findet kein größenordnungsmäßiger Abfall der Leitfähigkeit statt, der auf die Extinktionsprobleme der drahtlosen Telegraphie, wie sie oben angedeutet wurden, einen Einfluß haben könnte; da andererseits die von Debye und Falkenhagen vorausgesagten Leitfähigkeitsänderungen der Elektrolyte in diesem Frequenzbereich infolge ihrer sehr kleinen Zahlenwerte innerhalb der Fehlergrenze liegen, so ist es wahrscheinlich, daß geringe Differenzen zwischen den berechneten und gemessenen Werten auf den Strahlungswiderstand der Spulen, wie im Abschnitt über die Theorie der induktiven Heizung angegeben, zurückzuführen sind.

Zusammenfassung

1. Die Theorie der induktiven Heizung von Fischer und Wever gibt bei der Heizung von Metallen unter den angegebenen Beschränkungen die Verhältnisse auch zahlenmäßig gut wieder.

2. Die Umhüllung des Metalles mit einem Isolator scheint eine Erhöhung des Skineffektes zu bewirken, die mit der Di-

elektrizitätskonstante und der Wandstärke dieses Mediums wächst.

Umgekehrt kann man daraus den Schluß ziehen, daß die Erhöhung des Widerstandes, den ein von hochfrequentem Strom durchflossener isolierter Draht gegenüber einem blanken aufweist, nicht durch Dielektrikumsverluste des Isoliermaterials verursacht sein muß, sondern auch von seiner hohen Dielektrizitätskonstante herrühren kann.

3. In dem Bereiche, in dem die Erwärmung eines Körpers im Hochfrequenzofen proportional seiner Leitfähigkeit ist, kann der Einfluß der Spulenlänge durch einen konstanten Faktor angegeben werden.

4. Im Bereiche der Frequenzen der drahtlosen Telegraphie tritt keine größenordnungsmäßige Änderung des elektrolytischen Leitvermögens auf, die für die Wirkungsweise der Untererd- und Unterwasserantennen von entscheidendem Einfluß sein könnte.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Universität Marburg vom Sommer 1926 bis Winter 1928 ausgeführt. Hrn. Geheimrat Prof. Dr. E. Grüneisen bin ich für seine Ratschläge und seine tatkräftige Unterstützung zu großem Dank verpflichtet; ebenso Hrn. Professor Dr. F. A. Schulze für seine theoretischen Anregungen. Hr. Prof. Dr. Giebe (Berlin), Hr. Dr. Joe Engl (Berlin) und Hr. Dr. E. Rieckmann (Berlin) haben mir in liebenswürdiger Weise Auskünfte erteilt.

Literatur

- 1) E. Cohn, Wied. Ann. 38. S. 121 f. 1889.
- 2) H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft S. 121 u. S. 280. Anm. 15.
- 3) F. Kiebitz, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie 6. S. 567.
- 4) F. Ollendorff, Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik 1926. S. 20.
- 5) A. H. Taylor, Proc. of the Inst. of Radioengineers 7. S. 337. 1919; Radio News, S. 160. August 1928; Radio News S. 162. Juni 1926; Modern Wireless S. 41. Juli 1927; Scientific Age S. 418. 1925; Amer. Patent 1 303 728. Mai 1919.

- 6) J. A. Erskine, *Ann. d. Phys.* **62**. S. 454. 1897.
- 7) J. J. Thomson, *Proc. Royal Soc. London* **45**. S. 269.
- 8) W. Nernst, *Wied. Ann.* **60**. S. 612. 1879.
- 9) M. G. Ribaud, *Journ. de Physique* **4**. S. 185 u. 214. 1923; **6**. S. 295. 1925.
- 10) M. J. O. Strutt, *Ann. d. Phys.* **82**. S. 605. 1927; *Arch. f. Elektrotechnik* **19**. S. 424. 1928.
- 11) W. Fischer u. F. Wever, *Mitteil. a. d. K.-W.-Inst. f. Eisenforschung*, Abhandl. 69.
- 12) C. R. Burch u. N. Ryland Daves, *Phil. Mag.* [7] **1**. S. 768. 1926.
- 13) K. W. Wagner, *Ann. d. Phys.* **40**. S. 817. 1913.
- 14) H. G. Möller, *Die Elektronenröhren* S. 95 u. Fig. 62. 1920.
- 15) P. Debye u. H. Falkenhagen, *Dispersion der Leitfähigkeit und der dielektrischen Konstante starker Elektrolyte*. *Phys. Ztschr.* **29**. S. 121 u. 401. 1928.
- 16) E. Alberti u. F. Zickner, *Arch. f. Elektrotechn.* **13**. H. 1. 1924.
- 17) E. Nesper, *Ann. d. Phys.* **15**. S. 768. 1904.
- 18) H. Bruuns, *Messung des Widerstandes von Stromzweigen beim Durchgang von hochfrequentem Wechselstrom*. Diss. Halle 1926.
- 19) E. Korndörfer, *E. T. Z.* **38**. S. 521. 1917.

(Eingegangen 27. März 1929)

Absolute Intensitätsmessungen an Röntgenstrahlen

Von O. Gaertner

(Mit 4 Figuren)

Die Intensität der gefilterten Strahlung einer Glühkathodenröhre mit Kupferanode wird mittels elektrisch geeichten Thermoelementes gemessen und mit der Ionisierung verglichen, welche diese Strahlung in den Gasen Wasserstoff(?), Stickstoff (40,8), Sauerstoff (34,4), Argon (29,6) und Luft (36,4) erzeugt. Der Druck in der Ionisationskammer ist (Wasserstoff ausgenommen) so hoch, daß der ebenfalls gemessene, nicht absorbierte Anteil eine Korrekturgröße ist. Die in Volt pro Ionenpaar angegebenen Meßresultate sind hinter jedem Element in Klammern vermerkt. Für Argon werden die Messungen noch mit der Strahlung einer Molybdänanode durchgeführt. Für 0,714 ÅE ergibt sich 29,3 Volt pro Ionenpaar. Nebenbei ergibt sich für Sauerstoff eine wesentlich höhere Sättigungsspannung wie für Stickstoff.

Inhalt: 1. Apparate und Meßinstrumente. — 2. Versuchsdaten. — 3. Versuchsanordnung. — 4. Ionisationsmessungen. — 5. Energiemessungen. — 6. Messungen mit der Molybdänstrahlung. — 7. Versuche mit Wasserstoff. — 8. Zur Berechnung des Wirkungsgrades einer Röntgenröhre. — 9. Berechnung der Streustrahlung unter Berücksichtigung der Absorption. — 10. Diskussion der Messungen; Abbildungen u. Literatur.

Von den bisher untersuchten Problemen der absoluten Intensitätsmessung im Röntgengebiete erfordert die Beziehung zwischen der Ionisation eines Gases und der in demselben absorbierten Energie gegenwärtig das meiste Interesse, sowohl aus praktischen als auch theoretischen Gründen. Denn einerseits ermöglicht die Kenntnis dieser Beziehung eine Reduktion der wesentlich leichter ausführbaren und empfindlicheren Ionisationsmessungen auf absolute Werte, welches Verfahren man in sinngemäßer Auffassung auch als absolute Photometrie bezeichnen könnte; andererseits liefert diese Beziehung einen

Beitrag zu demjenigen Gebiete von Erscheinungen, welches man unter dem Namen „Durchgang von Kathodenstrahlen durch Materie“ zu rubrizieren pflegt. Die vorliegenden Untersuchungen zeigen eine selbst bescheidenen Ansprüchen kaum genügende Übereinstimmung des Wertes für die pro Ionenpaar notwendige Energiemenge. Nur darin scheint Übereinstimmung zu bestehen, daß dieser Wert innerhalb der Meßfehler von der Wellenlänge der ionisierenden Röntgenstrahlung unabhängig ist. Das Wellenlängengebiet erstreckt sich auf $2,0-0,5 \text{ \AA}$. Wenn man noch die Messungen mit Kathodenstrahlen als gleichwertig hinzurechnet, so erweitert sich dieses Gebiet auf $10-0,4 \text{ \AA}$. Die Literatur über Messungen mit Kathodenstrahlen hat Erich Buchmann (1) zusammengestellt. Eine Übersicht der Messungen mit Röntgenstrahlen gibt zuletzt Rump (2) in einer Arbeit über denselben Gegenstand.

Eine Unsicherheit aller Untersuchungen mit Röntgenstrahlen liegt in der Berechnung des in der Ionisationskammer absorbierten Anteils der Gesamtstrahlung. Denn die Absorptionskoeffizienten sind für Gase noch nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit sowie Vollständigkeit bekannt, und die mit selektiv durchlässigen Filtern nach der Hullschen Methode gewonnene Strahlung ist aus Intensitätsgründen nicht hinreichend homogen, um sie für den vorliegenden Zweck ohne weiteres durch eine mittlere Wellenlänge zu charakterisieren, wie sie sich aus einer Abschwächungsmessung in Kupfer oder Aluminium ergibt. Wie groß die dadurch notwendigen Korrekturen werden können, ergibt sich besonders deutlich aus der Arbeit von Rump (2). Spektral zerlegte Strahlung kommt, wenigstens vorläufig, für die Energiemessung kaum in Frage. Aber selbst für diesen Fall sei daran erinnert, daß der Massenabsorptionskoeffizient im Röntgengebiet annähernd proportional $z^3 \lambda^3$ ist, so daß sich Fehler in der Wellenlängenmessung sowie Verunreinigungen des Absorbers den Exponenten entsprechend auswirken. Die Charakterisierung des Strahlungsgemisches durch eine mittlere Wellenlänge wäre eher noch zulässig, wenn der in der Kammer absorbierte Anteil vergleichbar wäre mit demjenigen, der in dem zur Analyse dienenden Filter absorbiert wird. Tatsächlich werden aber in

der Kammer nur einige Zehntel bis 1 Proz. absorbiert, während für eine hinreichend genaue Abschwächungsmessung ein Intensitätsunterschied von mindestens 15 Proz. erforderlich ist. Schließlich bedingt die Verschiedenheit der Ordnungszahlen von Analysenfilter (Kupfer) und dem betreffenden Gase (Stickstoff usw.) möglicherweise einen wesentlichen Unterschied in dem Verhältnis von Streuung zu Absorption, dessen Einfluß auf die Zulässigkeit der genannten Berechnung mindestens eine Abschätzung erfordert. Zu den genannten Komplikationen treten noch weitere hinzu, wenn das Wellengebiet unterhalb etwa 0,7 ÅE in Frage kommt, weil alsdann die Streuung erhebliche Korrekturen erfordert und das Beobachtungsmaterial über Streukoeffizienten ebenfalls noch spärlich ist, von seiner Brauchbarkeit ganz abgesehen. Bekanntlich werden die oben genannten Absorptionskoeffizienten erst aus der Differenz der experimentell bestimmten Schwächungs- und Streukoeffizienten berechnet. Diese Berechnung ist im kurzwelligen Gebiet ohne entsprechende Meßgenauigkeit der Koeffizienten ganz undiskutierbar, weil schließlich die Streuung ein Vielfaches der Absorption beträgt. Kulenkampff⁽³⁾ hat die Inhomogenität dadurch berücksichtigt, daß er die spektrale Verteilung der Strahlungen bestimmte und daraus den in der Kammer absorbierten Anteil berechnete. Dieses Verfahren ist korrekt, aber ziemlich weitläufig.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Umrechnung auf vollständig absorbierte Energie dadurch umgangen, daß gemäß einem Vorschlage von Hrn. Prof. Grebe durch erhöhten Druck die Strahlung in der Kammer hinreichend absorbiert wird. Auf diesem Wege erhält man selbstverständlich einen Mittelwert für das Wellenlängengebiet, über welches sich die absorbierte Strahlung erstreckt. Die Konstanz von „Volt pro Ionenpaar“ wird in dem betreffenden Wellenlängengebiet also vorausgesetzt. Die Durchführung dieser Methode gelang aber erst nach schärfster Kalkulation aller Versuchsbedingungen, weil bei den hohen Drucken die Sättigungsspannung enorme Werte annimmt (etwa 35 kV pro Zentimeter für 10^{-8} Amp. bei 30 Atm.). Diese hohen Spannungen sind nicht nur eine Folge der geringeren Ionenbeweglichkeit, sondern auch der ungleichmäßigen Intensitätsverteilung längs der Kammer, welche

exponentiell ist. Diese von Natur aus ungünstige Verteilung wird noch dadurch verschlechtert, daß man zur vollständigen Absorption der Komponenten in der Nähe der Grenzwellenlänge weit höhere Drucke braucht, als sie zur Absorption der Komponenten des Energiemaximums erforderlich sind. Als Beispiel sei angeführt, daß für eine Länge von 45 cm ein Druck von 9 Atm. hinreicht, um die Kupfer- K_{α} -Strahlung bis auf 3 Proz. zu absorbieren. Aus technischen Gründen muß man aber die Röhre mit einer Spannung von mindestens 15 kV maximal betreiben; dann ist schon ein Druck von 30 Atm. nötig, um die Grenzwellenlänge bis auf 8 Proz. zu absorbieren. Aus diesem Grunde wurde von dem zuerst gefaßten Plane, die Strahlung bis auf etwa 0,5 Proz. zu absorbieren, abgesehen. Schon eine Beschränkung bis auf 5 Proz. gestattet es, mit einem niedrigeren Drucke auszukommen. Dementsprechend erniedrigt sich auch die Sättigungsspannung. Wenn nun die Stromspannungskurve sehr flach verläuft, ist es für die Genauigkeit der Messungen vorteilhafter, die Sättigungsspannung noch überschreiten zu können, als wie dieselbe im anderen Falle nur eben zu erreichen, um keine Korrektur für die durchgegangene Strahlung anbringen zu müssen. Die Intensität der durchgelassenen Strahlung wurde in üblicher Weise mit einer Ionisationskammer von Atmosphärendruck gemessen und auf vollständig absorbierte Energie umgerechnet. Diese Berechnung ist hier ohne nähere Diskussion zulässig, weil es sich um eine Korrekturgröße handelt und die austretende Strahlung stark gefiltert ist. Zuerst war geplant, ein Gas (Luft) für einen großen Wellenlängenbereich zu untersuchen. Als sich jedoch im Verlaufe der Untersuchung die hohen Werte für die Sättigungsspannung ergaben, wurden zunächst alle in Frage kommenden Gase für eine möglichst weiche Strahlung untersucht; hierfür war die Kupfer- K_{α} -Strahlung besonders geeignet.

Nach Abschluß dieser Untersuchung wurden die Messungen noch für Argon mit der Strahlung einer Molybdänanode durchgeführt. Mit Argon gelang wegen seines höheren Atomgewichtes die vollständige Absorption wesentlich leichter. Der Nachweis der vollständigen Absorption ließ sich hier einfacher aus der Unabhängigkeit des Sättigungsstromes vom

Druck erbringen. Diese Methode versagte jedoch bei Stickstoff und Sauerstoff, aus dem bereits oben angeführten Grunde, trotzdem die Kammerspannung bis 30 kV gesteigert wurde. Unter 10 ist jedoch eine andere Methode angegeben, welche auch für Stickstoff und Sauerstoff eine Ausdehnung der Messungen nach kürzeren Wellen ermöglicht, sogar mit spektral zerlegter Strahlung.

Gegenüber der Ionisationsmessung bot die Energiemessung kaum nennenswerte Schwierigkeiten. Da die Blende an der Ionisationskammer einen Durchmesser von nur 3 mm hatte, wurde nur ein Thermoelement benutzt, dessen Lötstellen sich jede hinter einem elektrisch heizbaren Platinstreifen befand. Die Messung mit einem Thermoelement war aber erst Dank der hohen Empfindlichkeit der von Zernicke konstruierten Drehspulgalvanometer möglich.

1. Apparate und Meßinstrumente

Die folgende Übersicht ist tabellarisch angelegt, da sich eine Erläuterung für jeden Einzelfall erübrigt.

Einankerumformer (SS.) 6 kV A.

Spannungswandler (SH.) 6 kV A. für Röhrenspannung.

Regulierungswandler (SH.) 10 kV A. zum Einstellen der Röhrenspannung.

Präzisionskugelfunkenstrecke (C. H. F. Müller); maximale Röhrenspannung.

Hochspannungsvoltmeter (Starke-Schröder, System Abraham-Villard) Gleichspannung f. die Kammer.

1 Galvanometer n. Zernicke 1 mm in $4,8 \text{ m } 1,305 \cdot 10^{-10} \text{ Amp.}$; 40 Ohm, $\tau = 4,0''$ (f. d. ganze Periode), für Messung des Ionen- und Thermostromes.

1 Galvanometer (SH.) für Vorversuche und Messung kleiner Widerstände.

10-Ohm-Instrument (SH.) für Heizstrommessung und Galv. Eichung.

1 Nadir-Universalinstrument für Widerstandsmessung.

1 Milliampereometer (HB.) Röhrenstrom.

Dreheisen Spannungsmesser (SH.) für Primärspannung des Hochspannungstransformators für die Röntgenröhre.

Dreheisenstrommesser (SH.) für Röhrenheizstrom.

| | |
|--|-------------------------------------|
| 1 Transformator 0,5 kV A. 50 kV eff. . . . | } Gleichspannung f. die Druckkammer |
| 1 Meirowsky-Kondensator 0,05 μF 20 kV . . . | |
| 1 Phönix-Glühventil 10 mA 60 kV eff. . . . | |
| 1 Dreheisen Spannungsmesser | |

- 1 technisches Manometer 0—200 kg/qcm (Schäffer & Budenberg).
- 1 Zweifaden-Elektrometer n. Wulf (Leybold) zur Messung von Ionenströmen $< 10^{-9}$ Amp.
- 2 technische Glühkathodenröhren mit Lindemannfenster (C. H. F. Müller), Belastbarkeit 600 Watt, mit Anoden aus Molybdän und Kupfer.

2. Versuchsdaten

Blende für die Druckkammer 3 mm Durchmesser, 2 mm stark (aus Hartblei).

Länge der bestrahlten Luftsäule in der Kammer 460 mm.
Abmessungen der Elektroden: zwei zueinander geneigte Platten 9 mm Abstand an der Blende, 25 mm am Ende.

Absorber für die Energiemessung: 2 Platinstreifen 100·5·0,05 mm in 40 mm Abstand auf einer Pertinaxplatte montiert; physikalisch reines Platin v. Heraeus. Verunreinigungen nach Angabe der Firma unter 0,01 Proz.

Abstand Fokus bis Absorber bzw. Blende: 185 mm.

Röhrenbelastung: 20 mA 15 kV maximal. (Röhre an einpolig geerdeten Transformator angeschlossen.)

Mittlere Wellenlänge der an dem Absorber ankommenden

Strahlung: $1,38 \text{ \AA} \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_{\text{Al}} = 35,3$. Zur Schwächungsmessung diente eine Folie von $15,7 \mu$. Die Intensität wurde energetisch gemessen.

Im Strahlengang befindliche Materialien: 2 Aluminiumfolien von je 7μ , 2 Cellophanfolien von je 30μ , 1 Celluloidfenster 300μ . Für die Energie und Ionisationsmessung waren die gleichen Materialien im Strahlengang.

Über die Beschaffenheit und Herkunft der untersuchten Gase gibt folgende Tabelle Auskunft:

| | | | |
|------------------|-------------------|------|------------|
| Wasserstoff . . | Leverkusen | 99 % | Reingehalt |
| Stickstoff . . . | Köln-Sürth | 96 % | " |
| Sauerstoff . . . | " | | |
| Argon | Höllriegelskreuth | 96 % | " |
| Preßluft . . . | Köln-Sürth | | |

Sämtliche Gase wurden durch ein 500 mm langes, mit frisch ausgeglühtem Chlorcalcium und Wattepfropfen beschicktes Rohr geleitet, bevor sie in die Druckkammer gelangten. Die Angaben des Reingehaltes stammen von der liefernden Firma. Von der Filterung der Kupferstrahlung mit einem Nickelfilter wurde aus Intensitätsgründen abgesehen.

Die Filter, welche notwendigerweise im Strahlengang sein mußten, absorbierten bereits ein Drittel der austretenden Strahlung, welche schon durch das Lindemannglas geschwächt ist. Ferner gestattete es die Charakteristik der mit 600 Watt belastbaren Glühkathodenröhre nicht, dieselbe bei 15 kV max. mit 60 mA zu betreiben, weil der Glühdraht dann überlastet worden wäre. Für die vorliegende Methode ist es auch wichtiger, die Grenzwellenlänge möglichst hoch zu halten, als ein möglichst kleines Spektralgebiet auszufiltern. Die den Korrekturrechnungen zugrunde gelegten Schwächungskoeffizienten wurden für Aluminium und Platin der Arbeit von Allen(4) und für Sauerstoff den Messungen von Hewlett und Richtmeyer entnommen, wie sie in Landolt-Börnstein angegeben sind. Für Luft und Stickstoff wurden daraus die Koeffizienten nach dem $z^2\lambda^3$ -Gesetz extra- bzw. interpoliert. Der Streustrahlungskoeffizient wurde für die Gase und Aluminium gleich 0,2 angenommen.

3. Versuchsanordnung

Dieselbe zeigt Fig. 1 und 2. Im Hintergrund (Fig. 2) befindet sich ein mit 5 mm starkem Bleiblech ausgekleideter Strahlenschutzkasten zur Aufnahme der Röhre. Diese Anordnung ist gleich für die später auszuführenden Messungen mit härteren Strahlen vorgesehen worden. Links auf dem Tisch befindet sich die Druckkammer. Dieselbe besteht aus einem 500 mm langen Mannesmannrohr von 72 mm lichter Weite, gegen welches zwei Flanschen mittels Bolzen angepreßt werden (Anordnung der Preßgaskondensatoren, wie sie von Hartmann & Braun hergestellt werden). Rechts auf dem Tisch befindet sich das Blechgehäuse zur Aufnahme des Thermoelementes. Innerhalb desselben steht ein zweiter mit Blech beschlagener Holzkasten, in welchem das Thermoelement unter einer Glasglocke montiert ist. Kammer und Thermoelement sind auf Schienen fahrbar angeordnet, so daß nach einmaliger Justierung die Ionisations- und Energiemessung in beliebiger Reihenfolge schnell nacheinander erfolgen können. Unter dem Tisch sind die zur Galvanometereichung erforderlichen Widerstände sowie die Batterie in einem Holzkasten zusammen montiert. Rechts von dem Tisch die Gleichspannungsanlage

für die Kammer und der Schalttisch. Die Schaltungen der Hochspannungsanlagen zum Betriebe von Röntgenröhren und zur Erzeugung von hoher Gleichspannung dürften inzwischen Allgemeingut geworden sein, so daß sich eine Beschreibung erübrigt. Außerdem werden dieselben noch reichlich oft angegeben. Die Galvanometerablesung erfolgte objektiv mit einer Präzisionsablesevorrichtung von Hartmann & Braun. Durch Ausprobieren gelang es, in 4,8 m Skalenabstand noch ein scharfes Bild des vor der Projektionslinse befindlichen Drahtes zu erhalten, welches ungefähr 0,3 mm breit war.

4. Ionisationsmessungen

Der Gang der endgültigen Messungen war folgendermaßen:

Die Kammer wurde bis zu dem in Frage kommenden Höchstdruck gefüllt und die Stromspannungskurve für denselben bei steigender Spannung aufgenommen, da der Kondensator bei abnehmender Spannung infolge der Zwischenschaltung des Ventils und der hohen Isolation erst nach einiger Zeit die niedrigere Spannung annimmt. Vor jeder Spannungssteigerung mußte das Galvanometer abgeschaltet und kurz geschlossen werden, da der Kapazitätsstrom durch die etwa 10 cm betragende Kapazität der Kammer einen Galvanometerausschlag von einem halben Meter gab. In demselben Sinne wirkten die Schwankungen der Netzspannung, so daß die endgültigen Messungen nur zu günstigen Zeiten erfolgen konnten. Die Auswahl dieser Zeit bereitete aber keine Schwierigkeiten, da die endgültigen Messungen für die vier Gase in rund 2 Stunden erledigt waren. Der Einfluß dieser Schwankungen wird verständlich, wenn man sich in bekannter Weise die Spannung aus einer Gleichspannung mit übergelagerter Wechselspannung zusammengesetzt denkt; wenn z. B. die Spannung sich plötzlich um 1 Proz. ändert, so beträgt die Amplitude dieses Stoßes bei 5000 Volt 50, bei 25000 schon 250 Volt. Es genügt also nicht, die Spannung unabhängig von ihrem Werte bis auf einen gewissen Bruchteil konstant zu halten; vielmehr muß dieser Bruchteil mit wachsender Spannung entsprechend kleiner werden, derart, daß die Differenz zwischen dem Maximal- und

Mittelwert unter einem gewissen Betrage bleibt. Die Isolation des Kondensators genügte auch nicht, um bei abgeschaltetem Transformator die Spannung für die Dauer einer Ablesung hinreichend zu halten. Durch die Spannungsabnahme treten aber Influenzerscheinungen auf, welche einen Galvanometerausschlag von 5—10 Skalenteilen verursachen. Ein Kondensator mit höherer Isolation wäre andererseits zu teuer gewesen. Weitere Störungen, welche von der Röhrenhochspannung hinzutraten, wurden durch entsprechende Leitungsführung beseitigt. Die Isolation der Durchführung in die Druckkammer war so gut, daß der Isolationsstrom mit dem Galvanometer überhaupt nicht nachweisbar war. Die Abdichtung der Kammer war bei den angewandten Drucken hinreichend, um die Druckabnahme innerhalb mehrerer Stunden vernachlässigen zu können. Nach Beendigung der Messungen bei dem Höchstdruck wurde zur Herstellung der niedrigeren Drucke eine entsprechende Menge Gas abgelassen. Um der Gefahr eines Überschlages in der Kammer vorzubeugen, wurde die Höchstspannung so bemessen, daß noch bei dem halben Druck kein Überschlag erfolgte; dies wurde zuerst durch Berühren der isolierten Elektrode mit der Erdleitung geprüft, während zur feineren Prüfung ein unempfindlicheres Galvanometer diente. In den Kurven auf Figg. 3 und 4 sind die Ergebnisse der Ionisationsmessungen enthalten.

Diese Ionisationsmessungen bedürfen noch mit Ausnahme derer an Argon einer Korrektur für die gestreute und die durchgelassene Strahlung. Zunächst soll die Korrektur für die Streuung besprochen werden.

Wie eine nähere Überlegung zeigt, ist eine exakte Berechnung dieser Korrektur wegen der Divergenz des Strahlenbündels und der Neigung der Elektroden sehr umständlich. Die einfachste Lösung besteht in der Berechnung einer oberen und unteren Grenze. Nimmt man das Mittel an, so kann man auch den maximalen Fehler angeben, welcher durch die Korrektur in das Endresultat gebracht wird. Ist dieser Fehler unbedeutend gegenüber den sonstigen Fehlern, so verlohnt es sich nicht, dieserhalb eine lange Rechnung durchzuführen. Der Anteil der einfallenden Strahlung, welcher in der Kammer gestreut wird, ist gleich dem Verhältnis aus Streu- und

Schwächungskoeffizienten. Dieses Verhältnis stellt die obere Grenze der anzubringenden Korrektur dar; es entspricht dem Falle, daß die gestreute Strahlung auf ihrem Wege durch die Kammer nicht wesentlich absorbiert wird. Zieht man von dem gestreuten Anteil denjenigen Betrag ab, welcher in einer Luftschicht von der Länge des Kammerradius absorbiert wird, so erhält man eine untere Grenze für die Korrektur. Die unter den genannten Voraussetzungen berechneten Werte sind folgendermaßen:

| | Stickstoff | Luft | Sauerstoff |
|-------------------|------------|------|------------|
| Obere Grenze . . | 4,8 | 3,6 | 3,3 % |
| Untere Grenze . . | 3,6 | 2,6 | 2,4 % |

Die beiden Grenzen unterscheiden sich also, auf das Ganze bezogen, um 1 Proz. Setzt man den Mittelwert ein, so beträgt der durch die Unsicherheit der Korrektur bedingte maximale Fehler im Endresultat 0,5 Proz. Tatsächlich liegen die Korrekturen noch näher an der oberen Grenze, weil die nach den Plattenelektroden gestreute Strahlung Luftwege zurücklegt, die kleiner als der Kammerradius sind (Plattenabstand 9 mm an der Blende!).

Zur Messung der durchgelassenen Strahlung wurde die isolierte Durchführung auf der Rückseite der Kammer gegen ein Zelluloidfenster ausgewechselt, dessen Durchmesser (20 mm) so groß war, daß das ganze Strahlenbündel hindurch konnte. Die Justierung der Kammer, auf die es hier besonders ankam, wurde mittels photographischer Aufnahmen und Fadenkreuz bewerkstelligt. Diese Aufnahmen dienten auch zur Ermittlung des Querschnittes des Strahlenbündels. Dicht hinter dem Fenster befand sich eine Ionisationskammer von 11 cm Länge mit Luft von Atmosphärendruck. Streng genommen muß diese Kammer mit demselben Gase gefüllt sein wie die Druckkammer. Die begangene Vernachlässigung macht bei Stickstoff 0,5 Proz. aus. Nachfolgend die Versuchsdaten:

Kapazität von Elektrometer und Kammer $8,6 \cdot 10^{-12}$ F

Spannungsdifferenz 35 Volt

Entladungszeiten 30,6, 31,5 bzw. 44,0 Sek.,

wenn die Druckkammer mit den Gasen Stickstoff (18 Atm.), Luft (13,5 Atm.) bzw. Sauerstoff (11 Atm.) gefüllt war. Die mittlere Wellenlänge der durchgelassenen Strahlung stimmte in allen drei Fällen bis auf 4 Proz. überein. Zur Vereinfachung der Rechnung wurde der Mittelwert angenommen, welcher 1,02 ÅE betrug; dieser Wert liegt schon nahe der Grenzwellenlänge (0,80 ÅE). Der Ionisationsstrom, welcher sich aus den oben angegebenen Daten berechnet, muß zur Umrechnung auf vollständig absorbierte Energie noch mit dem Faktor $1/\mu d$ multipliziert werden (μ = Absorptionskoeffizient, d = Länge der Kammer). Ferner betrug die Länge der durchstrahlten Luftsäule in der Druckkammer 46 cm bei der Ionisationsmessung, gegen 60,4 cm bei der Messung der durchgelassenen Strahlung. Die Abschwächung, welche die Strahlung in der Luftschicht von 60,4—46,0 cm sowie in dem Zelluloidfenster von 0,045 cm Stärke erfährt, ist ebenfalls noch zu berücksichtigen. Die Herkunft der zu allen diesen Rechnungen erforderlichen Absorptionskoeffizienten ist bereits unter 2 angegeben.

Zu den in der Druckkammer gemessenen Strömen müssen zur Berücksichtigung des nicht absorbierten Anteils noch folgende Werte addiert werden:

| Stickstoff | Luft | Sauerstoff |
|------------|------|---------------------------|
| 6,7 | 6,5 | $4,2 \cdot 10^{-10}$ Amp. |

In Prozenten ausgedrückt betragen die Korrekturen:

| | | |
|-----|-----|-----------|
| 6,2 | 5,2 | 3,1 Proz. |
|-----|-----|-----------|

Hierzu kommt noch die oben besprochene Korrektur für den nicht absorbierten Anteil der Streustrahlung im Betrage von:

| | | |
|-----|-----|-----------|
| 4,2 | 3,1 | 2,9 Proz. |
|-----|-----|-----------|

Die Sättigungsströme betragen mit allen Korrekturen bei

| Stickstoff | Luft | Sauerstoff | Argon |
|------------|-------|------------|-----------------------------|
| 120,2 | 135,0 | 142,9 | $165,4 \cdot 10^{-10}$ Amp. |

Für den Vergleich mit der Energiemessung werden die Ströme zweckmäßig auf die Blendenfläche 1 qcm umgerechnet.

Sie müssen dann noch mit dem Faktor $\frac{1}{\pi(0,15)^2}$ multipliziert werden (Blendendurchmesser 3 mm).

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Sättigungsspannung für Sauerstoff von 11 Atm. rund doppelt so groß ist wie für Stickstoff von 18 Atm.

5. Energiemessungen

Für die elektrische Eichung des Thermoelementes wurde die Substitutionsschaltung bevorzugt, bei welcher derselbe Platinstreifen einmal bestrahlt und dann elektrisch so stark geheizt wird, daß in beiden Fällen der Galvanometerausschlag der gleiche ist. Die Kompensationsschaltung hat den Nachteil, daß sie eine Abgleichung der beiden Absorber erfordert, was gerade bei einer Thermosäule am schwierigsten ist. Den Vorzug der Gleichzeitigkeit von Bestrahlung und Heizung bietet nahezu auch eine von Angerer zitierte Ausführung der Substitutionsmethode. Die Gleichheit der Heizleistung und Strahlungsenergie wird daran erkannt, daß beim schnellen Umschalten von Bestrahlung auf Heizung oder umgekehrt der Galvanometerausschlag sich nicht ändert. Für die Energiemessung stand zuerst ein Galvanometer von Kipp zur Verfügung, mit welchem unter den Bedingungen dieser Arbeit ein Ausschlag von 96 Skalenteilen in 4,8 m Abstand erhalten wurde. Von diesem Einsatz wurden die Zuführungen abgerissen, als die Klemmen mit zwei verschiedenen Erdleitungen in Berührung kamen, zwischen denen eine Spannungsdifferenz von 0,1 Volt bestand. Ein nachgelieferter Einsatz, dessen Daten unter 1 angegeben sind, hatte nur ein Viertel der Spannungsempfindlichkeit, so daß der Galvanometerausschlag nur 24 Skalenteile betrug. Trotzdem gelang die Messung bis auf einen maximalen Fehler von 2,0 Proz., da die Ablesung des Galvanometerausschlages bis auf 0,5 mm genau war. Die zur Ausschaltung eines Heizstromnebenschlusses durch das Galvanometer erforderliche Isolierung der Lötstelle gegen den Absorber gelang mit einem Empfindlichkeitsverlust von 35 Proz., indem man an der betreffenden Stelle des Platinstreifens einen Tropfen Zaponlack verdunsten ließ, und den Draht mit der plattgeschlagenen Lötstelle fest darüberspannte. Die Isolation

wurde durch Kommutieren des Heizstromes geprüft, wobei eine Verschiedenheit der Galvanometerausläge nicht nachweisbar war. Hierbei ist zu beachten, daß der Thermostrom proportional i^2 ist, der Nebenschlußstrom aber proportional i ist, also gerade bei kleinen Energien überwiegen kann.

Die aus Widerstand und Stromstärke berechnete Strahlungsenergie bedarf noch zweier Korrekturen. Von der auf den Absorber fallenden Energie wird ein Teil wieder als Röntgenstrahlen gestreut, ein anderer Teil löst an der Oberfläche Photoelektronen aus; die für diese Effekte verbrauchte Energie trägt nicht zur Erwärmung des Absorbers bei.

Die Berechnung des Streustrahlungsverlustes ist in einem besonderen Abschnitt (9) behandelt. Derselbe kommt bei 1,38 AE noch nicht in Frage.

Der von der Elektronenemission herrührende Verlust läßt sich exakt messen. Man kann nämlich diese Korrektur so anbringen, daß man entweder zu der gemessenen Energie noch den Betrag addiert, welcher in Elektronenergie verwandelt wird, oder daß man von dem gemessenen Ionisationsstrom denjenigen Betrag abzieht, welcher sich aus dem Strome ergibt, den die an der Platinoberfläche ausgelösten Elektronen in dem betreffenden Gase erzeugen. Dieser Strom läßt sich einfach dadurch messen, daß man an die hintere Wand einer hinreichend kurzen Ionisationskammer ein Stück Platin befestigt und die Zunahme des Ionisationsstromes bestimmt, die dadurch bewirkt wird, daß das Platin an Stelle eines Stückes Papier (welches im Vergleich zum Platin nur wenig Elektronen aussendet) bestrahlt wird. Blendet man das Strahlenbündel an derselben Stelle aus, an welcher sich die Blende für die Druckkammer befand und gibt man den beiden Blenden gleichen Querschnitt, so ergibt die Differenz direkt den Betrag, den man von dem Ionisationsstrom in der Druckkammer abziehen muß. Auf dem angegebenen Wege war eine Meßgenauigkeit von nur 10 Proz. erforderlich, um die Korrekturgröße dann noch zu bestimmen, wenn sie nur $1\frac{1}{10}$ Proz. ausmacht. Im vorliegenden Falle lag die anzubringende Korrektur noch unter diesem Betrage, weshalb sie nicht berücksichtigt wurde.

Oben wurde schon erwähnt, daß die Leistung des Heizstromes aus Widerstand des Absorbers und Stromstärke be-

rechnet wurde. Die gleichzeitige Messung von Strom und Spannung war hier nicht erforderlich, da die Temperaturerhöhung des Platinstreifens nur $5 \cdot 10^{-3}^{\circ} \text{C}$ betrug, welcher Betrag sich aus der bekannten Beziehung zwischen Thermokraft und Temperaturdifferenz unter Berücksichtigung des durch die Isolierung bewirkten Empfindlichkeitsverlustes berechnet. Für die ersten Messungen wurde der Widerstand des Platinstreifens aus dem in neueren Tabellen angegebenen (Meissnerschen) Werte 0,105 für 18° berechnet. Bei den endgültigen Messungen wurde die Temperatur des Streifens durch ein in das Schutzgehäuse gestecktes Thermometer bis auf $0,1^{\circ}$ gemessen. Nach Abschluß der Arbeit wurde der Widerstand bei bekannter Temperatur direkt aus Strom und Spannung mit einem Milliampereometer und einem Spiegelgalvanometer von hinreichender Spannungsempfindlichkeit gemessen. In bezug auf die Genauigkeit der Resultate sind zwar die beiden Verfahren, gleichzeitige Messung von Strom und Spannung oder Messung von Strom und Temperatur mit nachträglicher Widerstandsbestimmung gleichwertig; nicht aber in bezug auf Einfachheit, da man im ersten Falle zwei Galvanometer beobachten muß, im zweiten Falle ein Galvanometer in Verbindung mit einer meistens für die ganze Versuchsdauer gültigen Thermometerablesung.

Die Spannungsmessung erfolgte nicht an den Klemmen, welche zur Stromzuführung dienten, weil man den unbekannten Übergangswiderstand mit gemessen hätte, sondern zwischen zwei Punkten, welche 10 mm von den Klemmen entfernt waren. Die Potentialdrähte wurden zur Erzielung eines genau definierten Abstandes nicht angelötet. Dieselben bestanden vielmehr aus federndem Stahldraht von 0,3 mm, welcher vermöge seiner Federkraft gegen den Streifen drückte. Die Enden des Drahtes hatten die Form einer Schneide. Der Übergangswiderstand dieser Kontakte blieb ohne merklichen Einfluß auf die Messung, da der Widerstand im Galvanometerkreis 400 bis 1000 Ohm betrug. Der Abstand der Potentialdrähte wurde mit einer Schublehre gemessen. Die Einspannvorrichtung befand sich unter Öl in einem wärmeisolierten Behälter.

Das weitere ergibt sich aus den im folgenden angegebenen Zahlen.

| | |
|--|---|
| Stromempfindlichkeit des Galvanometers | 2,734 · 10 ⁻⁹ Amp. pro mm in 4,8 m, |
| Widerstand der Galvanometerspule . . . | 10 Ohm, |
| Abstand der Potentialdrähte | 70,0 mm, |
| Breite des Platinstreifens | 5,02 mm (mit der Mikrometerschraube gemessen) |
| Dicke des Streifens | 0,0506 mm (aus dem Gewicht berechnet). |

| Meßstrom in Amp. | Galv. Vorschalt- widerstand in Ohm | Galv. Ausschlag in mm | Pt-Widerstand pro m und qmm bei 15,8° C |
|--------------------------|---|-----------------------------|--|
| 13,90 · 10 ⁻⁹ | 415,3 | 365,5 | 0,1086 |
| 20,00 | 611,9 | 356 | 0,1083 |
| 30,00 | 1024 | 320 | 0,1086 |

Dies ergibt mit einem Temperaturkoeffizienten von 0,4 Proz. pro Grad 0,1095 für 18° C. Ein Fehler in der Bestimmung der Stärke geht nicht in die Berechnung der Energie ein.

Die Strahlungsenergie berechnet sich in Watt pro Quadrat-zentimeter und Sekunde aus der Formel $\frac{i^2 \cdot W}{F}$, wenn W der Widerstand eines Stückes von der Länge 1 cm und F dessen Fläche bedeutet. Im vorliegenden Falle ist $W = 4,31 \cdot 10^{-3}$ Ohm, $F = 0,502$ qcm, also die Intensität $i^2 \cdot 8,58 \cdot 10^{-3}$ Watt. Diese Formel gilt für eine Energiemessung bei der Temperatur 18° C. Bei anderen Temperaturen rechnet man zweckmäßiger den Heizstrom um. Für die Kupferstrahlung betrug der Heizstrom 28,8 mA bei 11,7° C, das entspricht

$$28,45 \text{ mA bei } 18^\circ \text{ C.}$$

Daraus ergibt sich die Intensität für die Kupferstrahlung zu

$$6,94 \cdot 10^{-6} \text{ Watt.}$$

Da der Galvanometerausschlag 24 Skalenteile betrug, ergibt sich eine Empfindlichkeit des Thermoelements von rund $3 \cdot 10^{-7}$ Watt pro Millimeter Ausschlag. Mit dem zuerst erwähnten Galvanometereinsatz hätte man $7,5 \cdot 10^{-8}$ Watt pro Millimeter erreicht. Durch Steigerung der Anzahl der Thermo-elemente auf 10 würde man $7,5 \cdot 10^{-8}$ Watt erreichen. Eine weitere Steigerung der Anzahl bringt keinen wesentlichen Gewinn mehr. Mit anderen bei weitem nicht so handlichen Legierungen von höherer Thermokraft, wie die hier benutzte

Kombination Kupfer-Konstanten, läßt sich die Empfindlichkeit höchstens noch verdreifachen. $3 \cdot 10^{-9}$ Watt pro Millimeter dürfte die höchste Empfindlichkeit sein, die sich bei 1,5 qcm Auffangfläche ohne erhebliche Komplikationen (Hochvakuum, Thermorelais) mit der absoluten Thermosäule erreichen läßt. Auch von den Nadelgalvanometern, wie sie durch Siemens, Cambridge Instrument Comp. und Leeds & Northrup in den Handel gebracht werden, bringt nur das von Coblenz konstruierte Instrument mit einer dreimal größeren Spannungsempfindlichkeit im Betrage von $20 \cdot 10^{-10}$ Volt pro Millimeter in 1 m einen nicht erheblichen Gewinn. Wenn eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit dieser Instrumente in einzelnen Fällen gelungen ist, so geschah dies auf Kosten der Zuverlässigkeit und Einfachheit der Justierung, welche dann Zeiten bis zu einer Woche erforderte. Davon abgesehen ist gerade beim Arbeiten mit Röntgenstrahlen ein Nadelgalvanometer mit einer bis zum äußersten getriebenen Empfindlichkeit am wenigsten zu brauchen, da es durch die Streufelder der Transformatoren, besonders der mit offenen Eisenkernen versehenen Heiztransformatoren gestört würde.

6. Messung mit der Molybdänstrahlung

Mit Argon lassen sich die Messungen ohne Schwierigkeiten erheblich ins kurzwellige Gebiet ausdehnen. Da jedoch der Platinstreifen vor dem Thermolement nur bis 0,5 ÅE hinreichend absorbierte, wurde lediglich noch eine Strahlung untersucht. Über die Arbeitsmethode ist nichts Besonderes mehr zu sagen.

| | |
|------------------------------------|--|
| Anodenmetall | Molybdän, |
| Röhrenbelastung | 25 mA, 27 kV max., |
| Filter | 0,6 mm Al, |
| Mittlere Wellenlänge | $0,714 \text{ ÅE} \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_{\text{Al}} = 5,43,$ |
| Energiemessung | Galvanometerausschlag 29,5 Skt. bei 16,2° C, Heizstrom 31,5 mA, |
| Korrektur für Elektronenemission . | 0,24 % |
| Korrektur für Streuung vom Platin | 0,42 % ($\sigma/\rho = 2$ an- genommen), |
| Korrektur für Streuung von Argon | liegt bei 1 %; wurde nicht berücksichtigt. |

Ionisationsmessungen

| kV | 18 Atm. | 13 Atm. | 10 Atm. | |
|------|---------|---------|---------|--------------------------------|
| 0,22 | 34 | 52 | 68 | Galv. Ausschlag in mm |
| 0,75 | 109 | 136 | 145 | |
| 3,0 | 146 | 155 | 155,5 | |
| 6,0 | 153 | 156 | 157,5 | |
| 9,0 | 157 | 157 | | |
| 12,8 | 158 | 157 | | |
| 16,5 | 157,5 | | | |

Sättigungsstrom für Blendenfläche 1 qcm: $\frac{157,5 \cdot 1,305 \cdot 10^{-10}}{\pi (0,15)^2}$ Amp.

7. Versuche mit Wasserstoff

Diese Versuche wurden weniger in der Absicht angestellt, eine Absorption nachzuweisen, als vielmehr in der Erwartung, daß dieselben sonst ein interessantes Resultat haben könnten. Der Nachweis einer Absorption ist nicht nur eine Frage der Empfindlichkeit der iontometrischen Messung. Die größte Schwierigkeit liegt in der Bestimmung des Anteils, welchen die Verunreinigungen an der Gesamtabsorption haben. Da man die Absorption in Wasserstoff aus der Differenz von Gesamtabsorption und derjenigen der Verunreinigungen berechnen bzw. experimentell bestimmen muß, und da der Anteil des Wasserstoffes selbst bei hohem Reingehalt voraussichtlich noch klein ist, müßten erst spezielle und hinreichend genaue Analysenmethoden für den Wasserstoff ausgearbeitet werden. Nichtsdestoweniger wurde folgender Versuch ausgeführt.

Die Druckkammer wurde mit Luft von Atmosphärendruck gefüllt und der Sättigungsstrom gemessen. Derselbe gab einen Galvanometerausschlag von 33 mm. Dann wurde die Kammer mit Wasserstoff bis zum Druck von 49 Atm. gefüllt, so daß der Wasserstoff mit 2 Vol.-Proz. Luft vermischt war. Bei 19 kV Kammerspannung wurde ein Galvanometerausschlag von 27 mm erhalten. Das Gemisch wurde wieder ausströmen gelassen, ebenso eine zweite Füllung mit 50 Atm. Für die dritte Füllung mit 50 Atm. war dann die Luft praktisch verdrängt. Mit dieser dritten Füllung wurde überhaupt kein oberhalb 1 mm liegender Galvanometerausschlag erhalten. Daraus geht erstens hervor, daß der Reingehalt des benutzten Wasserstoffes noch erheblich oberhalb 99 Vol.-Proz. gelegen

haben muß, entgegen den Angaben der liefernden Firma. Denn bei einer Verunreinigung von 1 Vol.-Proz., wofür nur N_2 oder O_2 in Frage kommen, wäre ein Galvanometerausschlag von 13,5 Skalenteilen zu erwarten gewesen. Zweitens zeigt dieser Versuch, daß der Sättigungsstrom bei 19 kV Kammer-spannung noch nicht erreicht ist, daß also die O_2 - bzw. N_2 -Ionen eine ganz erhebliche innere Reibung in dem Wasserstoff zu überwinden haben, trotzdem dessen Dichte nur so groß war wie diejenige der Luft unter 4 Atm. Um hierüber noch weiteren Aufschluß zu erhalten, wurde für beide Fälle die Stromspannungskurve aufgenommen.

Luft 1 Atm.

| | | | | | | | | | |
|----------------------|----|----|-----|-----|-----|-----|------|-------|-------|
| Volt | 27 | 59 | 100 | 184 | 262 | 482 | 4000 | 10000 | 19000 |
| Skt. Galv.-Ausschlag | 15 | 27 | 30 | 32 | 33 | 33 | | | |

Luft 1 Atm. + Wasserstoff 49 Atm.

| | | | | | | | | | |
|--------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| Skt. | 1 | 5 | 9 | 12 | 14 | 16 | 22 | 25 | 27 |
|--------------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|

Für Luft ist der Sättigungsstrom bei 262 Volt erreicht, für das Gemisch bei 19000 Volt noch nicht. Aus dem auffällig flachen Verlauf der Charakteristik könnte man den Schluß ziehen, daß die innere Reibung der N_2 - bzw. O_2 -Ionen in Wasserstoff mit der Geschwindigkeit ansteigt, oder anders ausgedrückt, daß der Stoßquerschnitt des Wasserstoffmoleküls gegenüber den Ionen von der Geschwindigkeit der letzteren abhängt.

8. Zur Berechnung des Wirkungsgrades einer Röntgenröhre

Der Wirkungsgrad einer Röntgenröhre ist mehrfach gemessen worden. Die in die Röhre geschickte Energie hat man teils experimentell aus der Erwärmung des Kühlwassers oder eines die Röhre umgebenden Ölbades bestimmt, teils hat man sie aus Röhrenstrom und Röhrenspannung berechnet. Dieser Berechnung hat man vielfach den Effektivwert der Röhrenspannung zugrunde gelegt. Mit Rücksicht darauf, daß Kulenkampff¹⁾ schreibt: „Es wird zweckmäßig sein, bei Messungen mit Wechselspannungen den Nutzeffekt auf die Effektivspannung zu beziehen“, sei bei Gelegenheit dieser

1) H. Kulenkampff, Handbuch der Physik 22. S. 445.

Arbeit darauf hingewiesen, daß hier einer der selteneren Fälle vorliegt, in denen man den linearen (elektrolytischen) Mittelwert der Spannung einzusetzen hat, wenn die Röhre mit annähernd sinusförmiger Wechselspannung betrieben wird. Dasselbe gilt für die Angabe der Belastbarkeit einer Röntgenröhre; allgemein bezeichnet man in der Röntgentechnik eine mit 20 kV eff. und 1 Amp. belastbare Röhre als eine 20-Kilowatt-Röhre. Der Unterschied von 10 Proz. zwischen den beiden Mittelwerten ist hier weniger von Bedeutung, da die Charakterisierung einer Röhre in der Technik auf Grund praktischer Gesichtspunkte nach Übereinkunft erfolgen kann. Aber auch die Messungen über den Wirkungsgrad können keine unterhalb 10 Proz. liegende Genauigkeit beanspruchen, da man die Strahlungsintensität nur in einer Richtung gemessen und dann für alle Emissionsrichtungen als gleich groß angenommen hat.

9. Berechnung der Streustrahlung unter Berücksichtigung der Absorption

Eine exaktere Berechnung der Streustrahlung unter Berücksichtigung der in dem streuenden Körper eintretenden Absorption ist eine durchaus lohnende Aufgabe. Denn die absolute Thermosäule ist im Röntgengebiet ein so vorzüglich geeignetes Meßinstrument, daß man dieselbe auch im kurzwelligen Gebiet noch so lange benutzen wird, als die Korrekturen für die Streustrahlung keine erhebliche Unsicherheit bedingen; diese Grenze wird aber um so weiter herausgeschoben, je genauer die Korrektur berechenbar bzw. meßbar ist. Auch der naheliegende Einwand, daß man im kurzwelligen Gebiet die gestreute Strahlung mittels kalorimetrischer Methoden besser erfassen kann, ist dahin zu beantworten, daß diese Methoden ebenfalls eine Schwäche haben. Besteht z. B. der Absorber aus einem Bleizylinder mit einer Bodenfläche, so erwärmt ein Teil der Primärstrahlung die Bodenfläche, die gestreute Strahlung verteilt sich aber in schwer zu überschender Weise auf den Zylindermantel. Dazu kommt noch, daß doch ein Teil der Streustrahlung wieder durch die Öffnung austritt, durch welche die Primärstrahlung in den Zylinder gelangt. Dieser Anteil läßt sich nur dadurch verkleinern,

daß man den Zylinder möglichst lang macht, wodurch die Wärmekapazität wieder unverhältnismäßig groß wird. Diese ungleichmäßige Verteilung der Temperatur läßt sich nun in bezug auf Ausstrahlungs- und Leitungsverluste nicht ohne weiteres ersetzen durch die Verteilung, wie sie zwecks Eichung des Kalorimeters mittels einer elektrisch geheizten Spirale hervorgebracht wird. Zwischen Thermosäule und Kalorimeter besteht hier ein ähnliches Verhältnis, wie zwischen Michelsonschem Stufengitter und Lummer-Gehrckeplatte; einmal sind die Korrekturen groß, aber wie gleich gezeigt wird, genauer bekannt, während im anderen Falle die Korrekturen möglicherweise klein sind, jedoch die Zulässigkeit der Eichung schwer zu kontrollieren ist.

Die einfachste Methode zur Messung der Streukoeffizienten besteht darin, daß man dem streuenden Körper eine lange und schmale Form gibt und denselben wie bei einer Debye-Scherreraufnahme mit einem Film umgibt, welchen man ausphotometriert. Die Auswertung der Schwärzung dieses Films nach dem Hartmannschen Prinzip gelingt im Röntgengebiet ohne Schwierigkeiten, da man hier bei sachkundiger Ausführung in der Einstellung des Röhrenstromes eine vorzügliche Methode zur meßbaren, nicht selektiven Schwächung der Primärstrahlung hat, von der übrigens noch wenig Gebrauch gemacht wurde.

Die Ausführung dieser Methode stellt aber eine Arbeit für sich dar, welche hier nicht mehr in Angriff genommen wurde. Im folgenden soll vielmehr eine ziemlich einfache Lösung gegeben werden, den Streustrahlungsverlust möglichst exakt zu berechnen, wenn der Streukoeffizient bekannt ist.

Der streuende Körper sei zweidimensional, das heißt die Dicke sei hinreichend klein gegen Länge und Breite. Ferner sei die Dicke so groß, daß kein wesentlicher Anteil der Streustrahlung auf der der Strahlenquelle abgewandten Seite austreten kann. Im letzteren Falle kann der gestreute Anteil höchstens $\frac{1}{2} \sigma/\rho$ betragen; denn man kann sich die Streustrahlung in die beiden Anteile zerlegt denken, welche in die beiden, durch den Absorber begrenzten Halbräume ausgestrahlt werden. Um die Absorption der Primärstrahlung, sowie diejenige der rückwärts gestreuten Strahlung zu berücksichtigen,

werde angenommen, daß dieser Anteil der Streustrahlung sich nur antiparallel zur Primärstrahlenrichtung fortpflanze. Lediglich dieser Fall soll im folgenden betrachtet werden.

Der Fehler, welcher durch diese vereinfachende Annahme begangen wird, wirkt in dem Sinne, daß der gestreute Anteil zu groß gefunden wird. Zur weiteren Annäherung kann man kugelsymmetrische Streuung annehmen. Dann bietet sich eine Lösung durch den Ansatz, daß die Absorption der Streustrahlung bei kugelsymmetrischer Streuung in einem Körper von der Dicke d gerade so groß ist, wie die Absorption bei antiparalleler Streuung in einem Körper von der Dicke $d \cdot f$, worin $f > 1$ eine reine Zahl ist. Dieser Faktor f berechnet sich durch Mittelwertbildung aus den Abständen zwischen einem Punkte im Inneren des streuenden Körpers und den Punkten seiner Oberfläche. Denn in allen von der antiparallelen verschiedenen Richtungen muß die Streustrahlung einen größeren Weg im streuenden Körper zurücklegen.

Es sei

E_0 die auf den Absorber fallende Energie,

E_x die Energie nach Durchgang durch eine Schicht von der Dicke x ,

dE_x die von einer im Abstande x unter der Oberfläche befindlichen Schicht der Dicke dx gestreute Strahlung,

σ der Streustrahlungskoeffizient,

μ der Absorptionskoeffizient,

d die Dicke des streuenden Körpers,

ΔE die insgesamt gestreute Strahlung, welche nicht absorbiert wird.

Dann ist:

$$\begin{aligned} dE_x &= \sigma \cdot dx \cdot E_x \\ &= \sigma \cdot dx \cdot E_0 e^{-(\mu + \sigma)x} \end{aligned}$$

Da gemäß Voraussetzung die in den einen Halbraum gestreute Strahlung vollständig absorbiert wird, so ist die rechte Seite dieser Gleichung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren. Da ferner der andere Teil den Körper nur in einer zur Oberfläche senkrechten Richtung durchsetzen soll, erfährt dieser Teil auf dem Weg zur Oberfläche dieselbe Schwächung, wie

die Primärstrahlung auf dem umgekehrten Wege, d. h. im Exponenten kommt noch der Faktor 2 hinzu. Dies ergibt:

$$dE_x = \frac{1}{2} \sigma dx \cdot E_0 e^{-2(\mu + \sigma)x},$$

integriert von $x = 0$ bis $x = d$:

$$E = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\sigma + \mu} E_0 (1 - e^{-2(\mu + \sigma)d}).$$

Über die Streukoeffizienten von Stoffen hohen Atomgewichtes liegt nur eine Arbeit von Barkla und Dunlop aus dem Jahre 1916 vor. Dieselben finden, daß der Massenstreu-
koeffizient mit dem Atomgewicht und der Wellenlänge ansteigt. Für Blei soll derselbe bei 0,6 ÅE 11mal größer sein wie für Aluminium, also rd gleich 2. Wenn dieser Wert auch keine besondere Geltung beanspruchen kann, so zeigt er doch, daß man der Streustrahlungskorrektur immerhin Beachtung schenken muß. Dies gilt besonders für das Gebiet unterhalb der K -Grenze. Denn es ist noch gar nicht genauer bekannt, wie sich hier die erhöhte Schwächung auf Streuung und Absorption verteilt. Glücklicherweise ergibt die unten folgende Rechnung, daß für die untersuchten Strahlungen die anzubringende Korrektur erst für einen unwahrscheinlich hohen Wert des Streukoeffizienten 1 Proz. beträgt.

Nach Allen(4) ist für Platin:

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right) = 152 \text{ für } 1,38 \text{ ÅE},$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right) = 119 \text{ für } 0,710 \text{ ÅE},$$

Ferner ist:

$$d = 0,005 \text{ cm}$$

$$\rho = 21,45$$

σ/ρ werde mit Barkla zu 2,0 angenommen.

Die Exponentialfunktion ist für die angegebenen Werte rund e^{-20} , also klein gegen 1. Zur Berechnung bleibt dann die Formel

$$\frac{dE}{E_0} = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\sigma + \mu} = \frac{1}{4} \frac{\frac{\sigma}{\rho}}{\frac{\sigma}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}}.$$

Nach dieser Formel beträgt die Korrektur für Streuung vom Platin:

0,3 Proz. für 1,38 ÅE

0,4 Proz. für 0,71 ÅE.

10. Diskussion der Messungen

Um die Resultate in Volt pro Ionenpaar anzugeben, muß die in Watt berechnete Strahlungsintensität durch den auf die Blendenfläche 1 qcm umgerechneten Ionisationsstrom (in Ampere) dividiert werden. Da hier nicht der Ort zu einer Diskussion theoretischen Inhalts ist, sei auf den für den vorliegenden Fall fiktiven Charakter dieser Angabe nur hingewiesen. Die Rechnung ergibt folgende Werte:

| Stickstoff | Luft | Sauerstoff | Argon |
|------------|------|------------|--------------------------|
| 40,8 | 36,4 | 34,4 | 29,6 Volt pro Ionenpaar, |

für eine mittlere Wellenlänge von 1,38 ÅE. Der Luftwert zeigt sehr gute Übereinstimmung mit dem Resultat von Kulenkampff, welcher 35 Volt fand. Kulenkampff legt jedoch auf den absoluten Wert weniger Gewicht wie auf die relativen Messungen und gibt auch eine Fehlergrenze von ± 5 an. Es ist sehr lehrreich, die Zusammensetzung der Luft mit den Anteilen zu vergleichen, welche die Komponenten an der Gesamtabsorption bzw. an der Ionisation haben und den Wert auch aus dem seiner Komponenten zu berechnen. Dieser Wert berechnet sich nach der Formel

$$\bar{V} = \frac{1}{\frac{a_1}{V_1} + \frac{a_2}{V_2} + \frac{a_3}{V_3}}.$$

Darin bedeuten a_1 , a_2 , a_3 bzw. die Bruchteile der in einer Luftschicht von beliebiger Länge insgesamt absorbierten Energie, welche auf die einzelnen Komponenten entfallen. Diese Anteile berechnen sich aus den drei Gleichungen

$$a_1 : a_2 : a_3 = \mu_1 p_1 : \mu_2 p_2 : \mu_3 p_3; \quad a_1 + a_2 + a_3 = 1.$$

p_1 , p_2 , p_3 bedeuten den Gehalt der Luft in Volumprozenten, nicht in Gewichtsprozenten. Die Zuordnung der Indizes sei 1. für Stickstoff, 2 für Sauerstoff und 3 für Argon. Berechnet man μ_1 und μ_2 aus den Messungen von Hewlett an Sauer-



Versuchsanordnung

Fig. 1

stoff und μ_3 aus den Messungen von Allen(4) an Aluminium, so erhält man für die Produkte μp der Reihe nach:

$$5,27 \quad 8,98 \quad 155 \cdot 10^{-3}.$$

Mit diesen Werten sind die in der zweiten und dritten Zeile angegebenen Zahlen der folgenden Tabelle (S. 119) berechnet.

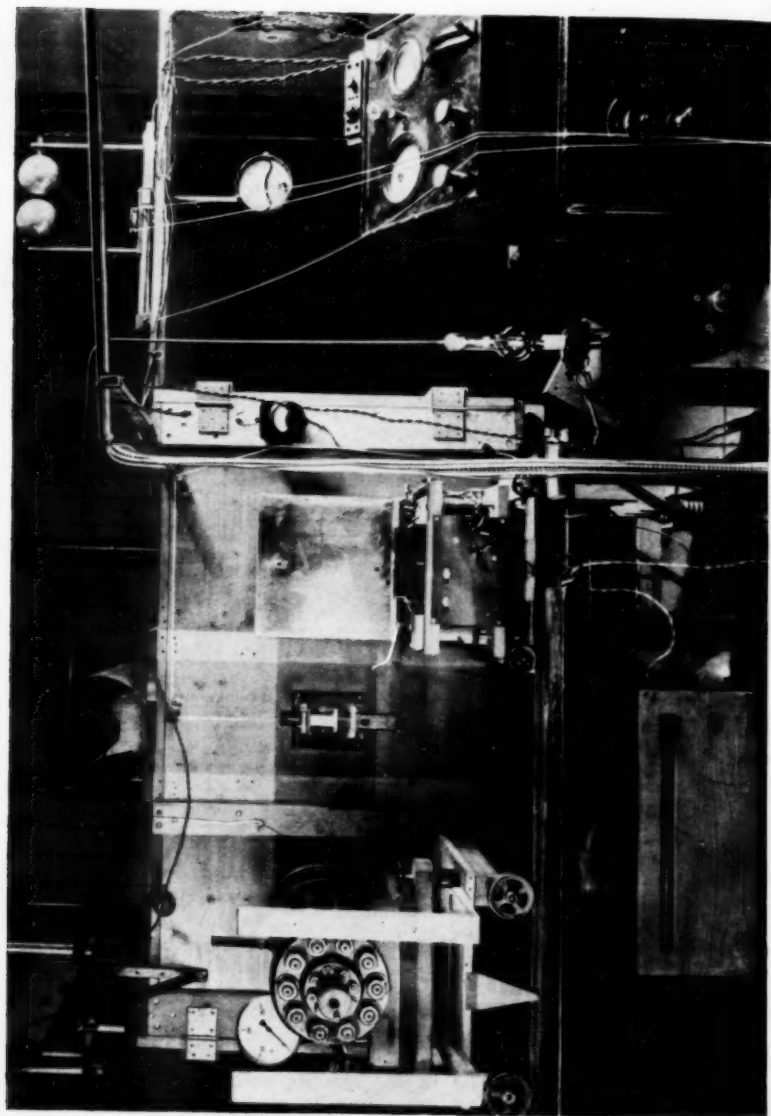
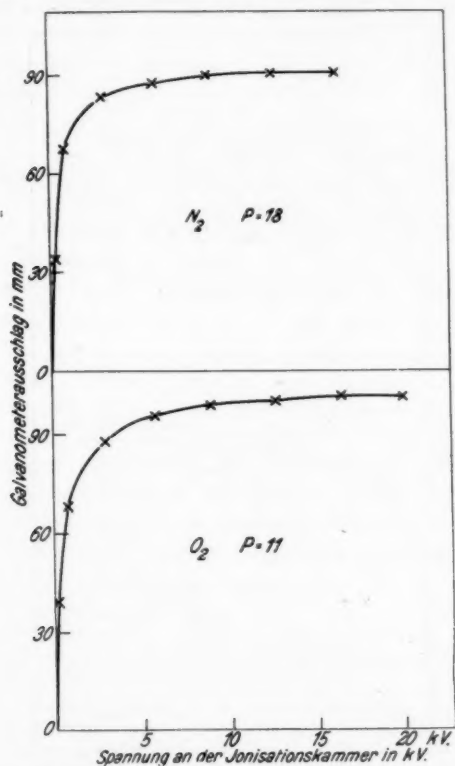


Fig. 2. Versuchsanordnung

Die Zahlen der Tabelle lehren, wie wichtig für theoretische Zwecke die Messungen an reinen Gasen sind, wohingegen die Messungen mit Luft trotz ihrer praktischen Bedeutung einen

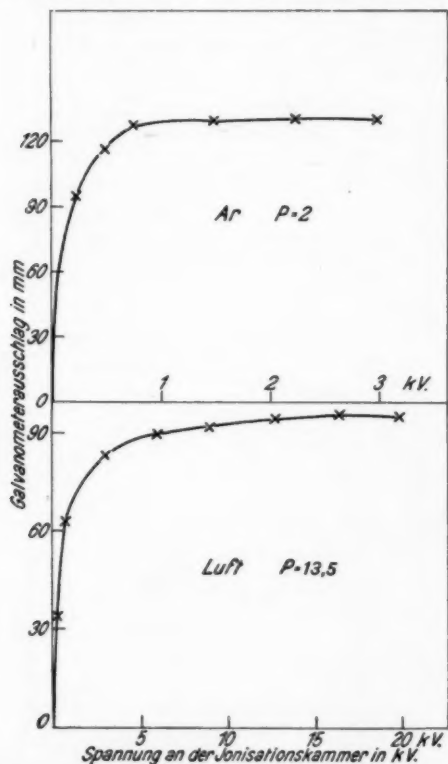


Stromspannungskurven für Sauerstoff u. Stickstoff. Druckangabe in kg/qcm

Fig. 3

| | N | O | Ar |
|---|------|------|------|
| Vol.-Proz. | 78,0 | 21,0 | 0,95 |
| Verteilung der in Luft absorbierten Energie auf die Komponenten . . | 55,0 | 25,3 | 19,7 |
| Verteilung der in Luft erzeugten Ionen auf die Komponenten | 48,6 | 26,6 | 24,8 |

recht komplizierten Fall darstellen, mit dem zu beschäftigen sich zunächst nicht lohnen dürfte. Aus den Zahlen der Tabelle und der obigen Formel ergibt sich für Luft aus den Komponenten berechnet 36,2 Volt pro Ionenpaar. Diese Über-



Stromspannungskurven für Luft und Argon. Druckangabe in kg/qcm

Fig. 4

einstimmung ist aber lediglich als Zufall anzusehen. Erstens sind die Absorptionskoeffizienten nicht mit der entsprechenden Genauigkeit sichergestellt und zweitens ist ein möglicherweise vorhandener Argongehalt des Stickstoffes und Sauerstoffes nicht berücksichtigt.

Ferner berechnet sich aus den unter 6 angegebenen Zahlen für Argon und die Molybdänstrahlung 29,3 Volt pro Ionenpaar. Daraus ist zu schließen, daß, wenn eine Abhängigkeit von der Wellenlänge besteht, dieselbe relativ klein sein muß. Was den Einfluß der Meßfehler anbetrifft, so ist derselbe für relative Messungen selbstverständlich kleiner als für absolute Messungen. Von den unten angegebenen Fehlern kommen die unter Nr. 2 bis 5 aufgezählten in Frage, deren Summe 4,2 Proz. beträgt. Mit der Argondruckkammer ist das Problem gelöst, die schwächsten ohne Stoßionisation noch nachweisbaren Strahlungen verschiedener Wellenlänge nicht nur relativ, sondern absolut auf Grund einer empirisch gewonnenen Beziehung zu messen; im ganzen übrigen Spektralgebiet gibt es keine gleichwertige Methode. Nachdem die Messungen mit Argon durchgeführt sind, lassen sich dieselben auch für N_2 und O_2 mit spektral zerlegter Strahlung weiterführen, deren Intensität mit der Argonkammer gemessen ist. Man kann dann die Ionisationsströme um mehrere ($r d \cdot 4$) Zehnerpotenzen verkleinern, um auch bei höheren Drucken mit niedrigeren Sättigungsspannungen auszukommen.

Zur Charakterisierung der Meßgenauigkeit soll hier der maximale Fehler angegeben werden. Derselbe hat vor dem mittleren Fehler den Vorzug, eindeutiger, leichter feststellbar und objektiver zu sein.

| | |
|--|-------|
| 1. Widerstand des Absorbers | 0,5 % |
| 2. Heizstrommessung | 0,2 „ |
| 3. Galvanometerablesung bei der Energiemessung (verursacht durch relativ kleinen Ausschlag) . . | 2,0 „ |
| 4. Galvanometereichung f. d. Ionisationsmessung . | 0,5 „ |
| 5. Galvanometerablesung bei d. Ionisationsmessung (verursacht durch Schwankungen der Strahlung und der Kammerspannung) | 1,5 „ |
| 6. Blendendurchmesser (3 mm) 0,05 mm ergibt für die Fläche einen Fehler von | 3,0 „ |
| 7. Korrektur für gestreute und durchgelassene Strahlung | 1,0 „ |
| Summe: | 8,7 % |

Die unter 1., 2. und 4. aufgezählten Fehler lassen sich ohne erheblichen Aufwand nicht mehr herabdrücken. Die Fehler 3., 5., 6. und 7., welche den überwiegenden Einfluß haben, lassen sich dagegen noch wesentlich herabsetzen. Die noch mögliche

Steigerung der absoluten Meßgenauigkeit ist jedoch Aufgabe einer besonderen Mitteilung.

Der Verf. hat zu danken:

Der Notgemeinschaft für die Bewilligung eines Forschungsstipendiums.

Hrn. Prof. Grebe für die Bereitstellung beträchtlicher Institutsmittel.

Der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen für die Überlassung von Argon.

Der Siemens-Halske A.-G. für die Überlassung eines Regeltransformators.

Literatur

- 1) E. Buchmann, Ann. d. Phys. **87**. S. 509. 1928.
- 2) W. Rump, Ztschr. f. Phys. **43**. S. 254. 1927.
- 3) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **79**. S. 97. 1926.
- 4) S. J. M. Allen, Phys. Rev. **28**. S. 912. 1926.

(Eingegangen 27. April 1929)

Das Abbild eines Drahtes bei paralleler Beleuchtung

Von C. Lakeman und J. Th. Groosmuller

(Mit 1 Figur)

§ 1. Ein langer Draht (oder eigentlich ein Band, dessen Dicke klein ist zur Breite) läßt sich auffassen als Doppelspalt,

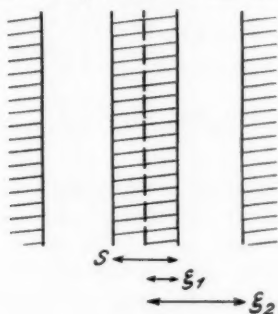


Fig. 1

(Fig. 1) wovon $\xi_2 \gg \xi_1$ ist; deshalb können wir die früher von uns hergeleiteten Formeln benutzen.¹⁾

Wir berechnen auch hier die Intensität in der Mitte des Drahtes, können also folgende Formeln benutzen.²⁾

$$(1) \quad \begin{cases} P \cos \varphi = 2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\sin 2\pi \sigma}{2\pi \sigma} \cdot \cos 2\pi \sigma x \cdot \cos 2\pi q \\ P \sin \varphi = -2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\sin 2\pi \sigma}{2\pi \sigma} \cdot \cos 2\pi \sigma x \cdot \sin 2\pi q. \end{cases}$$

1) C. Lakeman und J. Th. Groosmuller, Ann. d. Phys. [5] 1. S. 821. 1929.

2) C. Lakeman u. J. Th. Groosmuller, a. a. O. S. 823. 1929; die Bedeutung der gebrauchten Buchstaben ist dieselbe wie in der angeführten Arbeit.

Da wir jetzt den Fall $\sigma_2 \gg \sigma_1$ betrachten, können wir nicht mehr $q = \text{konstant}$ setzen, — zwar ist in der von uns gebrauchten Anordnung

$$[s = 0,20 \text{ mm}; \quad \varrho_0 = 15000 \text{ mm}; \quad \lambda = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ mm}]$$

der Wert von q für kleine Werte von ξ sehr klein [$q = 0,0005$ für $\sigma = \sigma_1$] — aber q nimmt mit anwachsendem ξ schnell zu.

Ohne gezwungen zu sein die beiden Formeln (1) gesondert zu betrachten, kann man ein Näherungsverfahren benutzen, das zwar nicht alle Minima liefert, aber die wichtigsten zu berechnen gestattet.

Wir schreiben:

$$(1') \quad \begin{cases} P \cos \varphi = 2 \cos 2\pi \bar{q} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\sin 2\pi \sigma}{2\pi \sigma} \cdot \cos 2\pi \sigma x \\ P \sin \varphi = 2 \sin 2\pi \bar{q} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\sin 2\pi \sigma}{2\pi \sigma} \cdot \cos 2\pi \sigma x. \end{cases}$$

worin \bar{q} und \bar{q} Mittelwerte des Integralsbereiches sind, welche im allgemeinen einander nicht gleich sein werden und überdies von x abhängen werden.

Da die Intensität dem Werte von P^2 proportional ist, haben wir, wenn wir das Integral Y nennen:

$$(2) \quad J \sim Y^2 \{ \cos^2 2\pi \bar{q} + \sin^2 2\pi \bar{q} \}.$$

Betrachten wir zuerst Y , welches Integral wir schreiben:

$$(3) \quad Y = \int_0^\infty d\sigma \frac{\sin 2\pi \sigma}{2\pi \sigma} \cdot \cos 2\pi \sigma x - \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\sin 2\pi \sigma}{2\pi \sigma} \cdot \cos 2\pi \sigma x.^1)$$

Das erste Integral läßt sich berechnen mittels der Fourier-schen Integralfunktion²⁾:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du.$$

1) Hierin ist nach der Annahme $\sigma_2 \gg \sigma_1$, $\sigma_2 = \infty$ gesetzt.

2) Vgl. z. B. E. Abbe, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop S. 61.

Mittels folgender Annahme für $f(x)$:

$$f(x) \begin{cases} 0 & \text{für } x > 1 \text{ und } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \text{ und } x = -1 \\ 1 & \text{für } x < 1 \text{ und } x > -1 \end{cases}$$

haben wir:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} \cdot \cos z x \cdot dz.$$

Setzen wir noch $z = 2\pi\sigma$, so folgt:

$$(4) \quad \frac{1}{2}f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi\sigma}{2\pi\sigma} \cdot \cos 2\pi\sigma x \cdot d\sigma.$$

Das zweite Integral von (3) schreiben wir:

$$(5) \quad g(x) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\sin 2\pi\sigma}{2\pi\sigma} \cdot \cos 2\pi\sigma x.$$

Die Integration läßt sich ausführen, wenn wir zuerst nach x differenzieren:

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{\cos 2\pi\sigma_1 \sin 2\pi\sigma_1 x - x \sin 2\pi\sigma_1 \cos 2\pi\sigma_1 x}{2\pi(1-x^2)}.$$

Schreiben wir das rechte Glied $\varphi(x)$, dann folgt:

$$(5') \quad g(x) = \int_0^x \varphi(x) dx + C.$$

Der Wert C ist zu berechnen, wenn wir $x = 0$ setzen:

$$g(0) = C = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\sin 2\pi\sigma}{2\pi\sigma}.$$

Jetzt läßt sich Y berechnen aus der Formel:

$$(6) \quad Y = \frac{1}{2}f(x) - \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\sin 2\pi\sigma}{2\pi\sigma} - \int_0^x \varphi(x) dx.$$

Bei der experimentellen Prüfung dieser Formel haben wir den Fall $\sigma_1 = 1/2$ betrachtet.

Die Formel (6) ist jetzt:

$$(6') \quad Y = \frac{1}{2}f(x) - \int_0^{1/2} \frac{\sin 2\pi\sigma}{2\pi\sigma} \cdot d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{\sin \pi x}{1-x^2} dx.$$

Mittels mechanischer Quadraturen findet man folgende Werte für die Integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2\pi \sigma}{2\pi \sigma} d\sigma = 0,297.$$

| x | $\frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{\sin \pi x}{1-x^2} dx$ | x | $\frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{\sin \pi x}{1-x^2} dx$ |
|----------------|---|----------------|---|
| $\frac{1}{4}$ | 0,015 | $\frac{13}{4}$ | 0,301 |
| $\frac{1}{2}$ | 0,057 | $\frac{2}{2}$ | 0,307 |
| $\frac{3}{4}$ | 0,116 | $\frac{21}{4}$ | 0,303 |
| 1 | 0,180 | $\frac{21}{2}$ | 0,295 |
| $\frac{11}{4}$ | 0,237 | $\frac{23}{2}$ | 0,289 |
| $\frac{11}{2}$ | 0,278 | 3 | 0,287 |

Hieraus lassen sich die Werte von Y berechnen; folgende Tabelle gibt die Resultate:

| x | Y | x | Y |
|----------------|--------|----------------|--------|
| 0 | -0,047 | $\frac{13}{4}$ | +0,004 |
| $\frac{1}{4}$ | -0,032 | $\frac{2}{2}$ | +0,010 |
| $\frac{1}{2}$ | +0,010 | $\frac{21}{4}$ | +0,006 |
| $\frac{3}{4}$ | +0,126 | $\frac{21}{2}$ | -0,002 |
| 1 | +0,008 | $\frac{23}{2}$ | -0,008 |
| $\frac{11}{4}$ | -0,060 | 3 | -0,010 |
| $\frac{11}{2}$ | -0,019 | | |

Aus einer graphischen Darstellung dieser Werte kann man die Werte x , für welche $Y = 0$, finden:

$$x_1 = 0,45; \quad x_2 = 1,02; \quad x_3 = 1,68; \quad x_4 = 2,45.$$

Jetzt haben wir in der Formel (2) den zweiten Faktor $\cos^2 2\pi \bar{q} + \sin^2 2\pi \bar{q}$ zu betrachten. Hiervon läßt sich nur sagen, daß es ziemlich unwahrscheinlich ist, daß dieser Faktor zu schwarzen Minima Anlaß geben wird; wohl aber ist es möglich, daß diese Funktion Maxima und Minima hat, woraus auch Stellen minimaler Intensität folgen werden. Diese lassen sich aber auf diese Weise nicht bestimmen. Die Sichtbarkeit dieser Minima wird geringer sein als bei den Minima $Y = 0$. Wir haben beim Experiment tatsächlich solche Minima gefunden; die wichtigsten aber stimmten mit den Werten $Y = 0$ überein.

§ 2. Da obige theoretische Betrachtung nur gilt für parallele Beleuchtung und das Experiment zeigte, daß kleine Abweichungen das Resultat bedeutend ändern, war es nötig einen sehr schmalen Beleuchtungsspalt ($1/10$ mm) in großem Abstand (4 m bzw. 8 m) aufzustellen.

Da die Erscheinungen symmetrisch sein müssen, war es möglich den Stand des Beleuchtungsspaltes bei zentraler Beleuchtung zu ermitteln.

In folgender Tabelle sind die Stellen dieses Spaltes in Millimeter gegeben (die Mitte bei 54,85 bzw. 50,8) für welche schwarze Minima auftraten.

Die Berechnung dieser Stellen gelingt auf folgende Weise.

Da $\sigma_1 = 1/3$ also $s = \lambda : 4 A_0$ ist, kann mit $s = 0,20$ mm und $\lambda = 6,7 \cdot 10^{-4}$ mm A_0 berechnet werden; mittels $x = A_b : A_0$ und $A_b = y : 4000$ bzw. $y : 8000$ (y = die Verschiebung aus der Mitte) findet man:

$$y = 3,35 x \text{ bzw. } = 6,7 x.$$

Die Verschiebungen werden dann:

$$\begin{array}{cccc} y = 1,5; & 3,4; & 5,6; & 8,2, \\ \text{bzw. } y = 3,0; & 6,8; & 11,2; & 16,4; \end{array}$$

Folgende Tabellen geben die experimentellen Resultate nebst den berechneten.

| Best. | Ber. | Best. | Ber. | Best. | Ber. | Best. | Ber. |
|-------------------|------|-------|------|-------|------|-------|------|
| 63,1 | 63,1 | 53,2 | 53,4 | 67,5 | 67,2 | 48,0 | 47,8 |
| 62,3 | ? | 50,9 | 51,4 | 65,0 | ? | 44,2 | 44,0 |
| 60,4 | 60,5 | 49,0 | 49,2 | 63,4 | ? | 40,2 | 39,7 |
| 58,3 | 58,3 | 47,8 | ? | 61,7 | 62,1 | 38,1 | ? |
| 56,2 | 56,4 | 46,7 | 46,7 | 57,7 | 57,6 | 37,0 | ? |
| 54,8 ^s | — | | | 53,2 | 53,8 | 34,6 | 34,4 |
| | | | | 50,8 | — | | |

Hieraus zeigt sich eine genügende Übereinstimmung; die mit einem ? angegebenen Werte müssen erklärt werden aus dem Faktor $\cos^2 2\pi \bar{q} + \sin^2 2\pi \bar{q}$.

Diese Minima sind sehr schwer wahrnehmbar durch die sehr kleine Intensität der Beleuchtung. Auch waren im Felde Beugungsstreifen sichtbar vom Beleuchtungsspalte, welche die Bestimmung der Minima sehr erschwerten.

Macht man den Beleuchtungsspalt breiter, dann werden die Minima bald unscharf. Ist der Spalt 3 mm bzw. 5 mm breit, so sind die Minima gar nicht mehr zu sehen; nur der Übergang vom Hell- ins Dunkelfeld bleibt.

Das stimmt überein mit einem von uns aufgestellten Satz.¹⁾ Man kann aber nicht sagen, daß das Bild immer übereinstimmt mit dem Bilde eines selbstleuchtenden Drahtes; im Hellfelde könnte man vielmehr das Bild *komplementär* nennen, während im Dunkelfelde die Übereinstimmung mit dem Abbilde eines selbstleuchtenden Objektes vollkommen sein kann.

Amsterdam, Naturkundig Laboratorium der Universiteit.

1) C. Lakeman u. J. Th. Groosmuller, a. a. O., S. 823.

(Eingegangen 30. April 1929)